1. 사차방정식 $(x-1)(x-2)(x+2)(x+3)=-3$을 풀면?

① $x=\pm 2$ 또는 $x=2\pm 3\sqrt{6}$

② $x=\pm 4$ 또는 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$

③ $x=\dfrac{3\pm\sqrt{3}i}{2}$ 또는 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$

④ $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$ 또는 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{21}}{2}$

⑤ $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$ 또는 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}i}{2}$

해설

$(x-1)(x-2)(x+2)(x+3)=-3$에서

$(x-1)(x-2)(x+2)(x+3)+3=0$ 이므로

$(x^2+x-2)(x^2+x-6)+3=0$에서

$x^2+x=t$로 치환하면

$$\begin{aligned}(t-2)(t-6)+3&=t^2-8t+12+3\\&=t^2-8t+15\\&=(t-3)(t-5)=0\end{aligned}$$

따라서 $(x^2+x-3)(x^2+x-5)=0$

$x^2+x-3=0$ 에서

$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$

$x^2+x-5=0$ 에서

$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{21}}{2}$

2. $x^4 - 5x^2 - 14 = 0$의 두 허근을 α, β라 할 때, $\alpha^2 + \beta^2$의 값을 구하면?

① 4　② -4　③ 8　④ -8　⑤ -16

해설

$x^4 - 5x^2 - 14 = (x^2 + 2)(x^2 - 7) = 0$이므로
두 허근 α, β는
각각 $\sqrt{2}i$, $-\sqrt{2}i$이므로
$\alpha^2 + \beta^2 = -2 - 2 = -4$

3. 방정식 $x^3 - x^2 + ax - 1 = 0$의 한 근이 -1일 때, 상수 a의 값과 나머지 두 근을 구하면?

① $a = 3, 1 \pm \sqrt{2}$ ② $a = -3, 1 \pm \sqrt{2}$
③ $a = 3, 1 \pm \sqrt{3}$ ④ $a = -3, 1 \pm \sqrt{3}$
⑤ $a = -1, 1 \pm \sqrt{2}$

해설

$x = -1$이 근이므로 $-1 - 1 - a - 1 = 0$에서 $a = -3$
인수정리와 조립제법을 이용하면
(좌변) $= (x+1)(x^2 - 2x - 1) = 0$
$x^2 - 2x - 1 = 0$의 근은 $1 \pm \sqrt{2}$
$\therefore a = -3$, 나머지 근은 $1 \pm \sqrt{2}$

4. 다음 중 $1+i$가 하나의 근이며 중근을 갖는 사차방정식은?

① $(x^2-2x+2)(x^2-2x+1)$

② $(x^2-2x+2)(x-1)(x+1)$

③ $(x^2-1)(x^2-2x-1)$

④ $(x^2+1)(x-1)(x+1)$

⑤ $(x^2+1)(x^2-2x+1)$

해설

한 근이 $1+i$이면
다른 한 근은 $1-i$이다.
$\therefore\ \{x-(1+i)\}\{x-(1-i)\}=0$
$\Rightarrow\quad x^2-2x+2=0$
주어진 조건에 맞는 방정식 :
$(x^2-2x+2)(x-\alpha)^2=0$
$\therefore$ ①이 조건에 맞다

5. 계수가 유리수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 한근이 $2-\sqrt{3}$일 때, $\frac{c-b}{a}$의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

계수가 유리수인 이차방정식에서 $2-\sqrt{3}$이 근이면 $2+\sqrt{3}$도 근이므로

근과 계수의 관계에 의하여 $-\frac{b}{a}=\left(2+\sqrt{3}\right)+\left(2-\sqrt{3}\right)=4$

$\frac{c}{a}=\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)=1$

$\therefore\ \frac{c-b}{a}=\frac{c}{a}+\left(-\frac{b}{a}\right)=1+4=5$

6. 삼차다항식 $f(x)$와 이차다항식 $g(x)$가 다음의 세 조건을 만족한다.

> (A) $f(x)$를 $g(x)$로 나누면, 몫이 $x-2$이고 나머지가 $x+6$이다.
> (B) $f(x)-(x-7)g(x)$는 $x+1$로 나누어떨어진다.
> (C) 방정식 $g(x)=2x+5$의 해는 $-2, 1$이다.

이 때, 방정식 $f(x)=0$의 실근 중 가장 작은 것을 구하면 ?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

(A)에서 $f(x)=(x-2)g(x)+x+6$이므로 $x=-1$을 대입하면
$f(-1)=-3g(-1)+5 \cdots\cdots$ ㉠
(B)에서 $f(-1)+8g(-1)=0 \cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡를 연립하면,
$f(-1)=8,\ g(-1)=-1 \cdots\cdots$ ㉢
(C)에서 $g(x)-(2x+5)=0$의 해가 $-2,\ 1$이므로,
$g(x)-(2x+5)=a(x+2)(x-1)$
$g(x)=a(x+2)(x-1)+2x+5$
㉢에서 $g(-1)=-2a+3=-1$이므로 $a=2$
$\therefore\ g(x)=2x^2+4x+1$
$\therefore\ f(x)=(x-2)g(x)+x+6$
$\quad\quad =2x^3-6x+4=2(x-1)^2(x+2)$
따라서 방정식 $f(x)=0$의 실근 중 가장 작은 것은 -2이다.

7. 다음 방정식의 모든 해의 곱을 구하여라.

$$(x^2-2x)(x^2-2x-2)-3=0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

$(x^2-2x)(x^2-2x-2)-3=0$ 에서
$x^2-2x=t$ 로 놓으면
$t(t-2)-3=0$,
$t^2-2t-3=0$
$(t-3)(t+1)=0$
$\therefore$ $t=3$ 또는 $t=-1$
(i) $t=3$, 즉 $x^2-2x=3$ 일 때
$x^2-2x-3=0$
$(x-3)(x+1)=0$
$\therefore$ $x=-1$ 또는 $x=3$
(ii) $t=-1$, 즉 $x^2-2x=-1$ 일 때
$x^2-2x+1=0$
$(x-1)^2=0$
$\therefore$ $x=1$ (중근)
따라서, $-1\times3\times1=-3$

8. 삼차방정식 $x^3+ax^2+bx-3=0$ 의 한 근이 $1+\sqrt{2}i$ 일 때, 두 실수 a, b 의 곱 ab 의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① -15 ② -10 ③ 0 ④ 5 ⑤ 10

해설

한 근이 $1+\sqrt{2}i$ 이므로 켤레근은 $1-\sqrt{2}i$
세 근이 α, β, γ 일때 $\alpha\beta\gamma=3$ 이므로, $\alpha=1+\sqrt{2}i$, $\beta=1-\sqrt{2}i$
라 하면, $(1+\sqrt{2}i)(1-\sqrt{2}i)\cdot\gamma=3$
$3\cdot\gamma=3$
$\gamma=1$
$\alpha+\beta+\gamma=-a=(1+\sqrt{2}i)+(1-\sqrt{2}i)+1=3$
$a=-3$
$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\beta=b=3+(1-\sqrt{2}i)\cdot 1+1\cdot(1+\sqrt{2}i)=5$
$b=5$
$\therefore\ ab=(-3)\cdot 5=-15$

9. 허수 w가 $\omega^3 = 1$을 만족할 때, $\omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5$ 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$$w^3 = 1 \Rightarrow \quad (\omega - 1)(\omega^2 + \omega + 1) = 0$$
$$\Rightarrow \quad \omega^2 + \omega + 1 = 0, \omega^3 = 1$$

$$\therefore \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5$$
$$= \omega + \omega^2 + 1 + \omega + \omega^2$$
$$= (\omega^2 + \omega + 1) + \omega^2 + \omega = -1$$

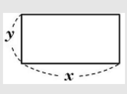
10. 가로의 길이가 세로의 길이보다 5 cm 더 긴 직사각형이 있다. 둘레의 길이가 34 cm 일 때, 이 직사각형의 가로의 길이와 세로의 길이의 곱을 구하여라.(단, 단위 생략)

▶ 답 :

▷ 정답 : 66

해설

직사각형의 가로, 세로의 길이를
각각 $x$cm, $y$cm 라 하면



$x = y + 5 \quad \cdots\cdots$ ㉠
또, 이 직사각형의 둘레는 $2(x+y)$ 이므로
$2(x+y) = 34$ 즉, $x + y = 17 \quad \cdots\cdots$ ㉡
㉠을 ㉡에 대입하면
$y + 5 + y = 17$, $2y = 12$
$\therefore\ y = 6$
$y = 6$을 ㉠에 대입하면 $x = 11$
$\therefore\ xy = 11 \times 6 = 66$

11. 다음 방정식의 실근의 합을 구하여라.

$$x^4+5x^3-12x^2+5x+1=0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : -6

해설

$x=0$을 대입하면
$1=0$이 되어 모순이므로 $x\neq 0$이다.
따라서, 주어진 식의 양변을
x^2으로 나누면
$x^2+5x-12+\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}=0$
$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+5\left(x+\frac{1}{x}\right)-12=0$
$\therefore\ \left(x+\frac{1}{x}\right)^2+5\left(x+\frac{1}{x}\right)-14=0$
여기서 $x+\frac{1}{x}=X$로 놓으면
$X^2+5X-14=0,\ (X+7)(X-2)=0$
$\therefore\ X=-7$ 또는 $X=2$
(i) $X=-7$일 때,
$x+\frac{1}{x}=-7$에서
$x^2+7x+1=0$
$\therefore\ \frac{-7\pm3\sqrt{5}}{2}$
(ii) $X=2$일 때,
$x+\frac{1}{x}=2$에서
$x^2-2x+1=0,\ (x-1)^2=0$
$\therefore\ x=1$
(i), (ii)로부터
$x=1$(중근) 또는 $x=\frac{-7\pm3\sqrt{5}}{2}$
따라서, 모든 근의 합은
$1+\frac{-7+3\sqrt{5}}{2}+\frac{-7-3\sqrt{5}}{2}=-6$이다.

12. 삼차방정식 $x^3 = 1$의 한 허근을 ω라 할 때, 다음<보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, $\overline{\omega}$는 ω의 켤레복소수이다.)

보기

㉠ $\omega + \dfrac{1}{\omega} = -1$ ㉡ $\omega^2 + \overline{\omega}^2 = 1$

㉢ $(\omega + 1)(\overline{\omega} + 1) = 1$

① ㉠ ② ㉠, ㉡ ③ ㉡, ㉢

④ ㉠, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$x^3 = 1,$

$x^3 - 1 = 0,$

$(x-1)(x^2 + x + 1) = 0$

$w^2 + w + 1 = 0 \ \cdots ①$

$\overline{w}^2 + \overline{w} + 1 = 0 \cdots ②$

㉠ ① 식을 w로 나누면 $w + \dfrac{1}{w} = -1$

㉡ $x^2 + x + 1 = 0$의 두 근 $w, \overline{w}$

$w + \overline{w} = -1, \ w\overline{w} = 1$

$w^2 + \overline{w^2} = (w + \overline{w})^2 - 2w\overline{w} = 1 - 2 = -1$

㉢ $(w+1)(\overline{w}+1)$

$= w\overline{w} + w + \overline{w} + 1 = 1 - 1 + 1 = 1$

∴ ㉠, ㉢ 맞음

13. $\begin{cases} |x|+x+y=10 \\ x+|y|-y=12 \end{cases}$ 일 때, $x+y$의 값은?

① -2 ② 2 ③ $\frac{18}{5}$ ④ $\frac{22}{3}$ ⑤ 22

해설

$|x|+x+y=10$ ⋯⋯ ㉠
$x+|y|-y=12$ ⋯⋯ ㉡
$x \le 0$ 이면, $y=10$, $x=12$
이것은 $x \le 0$ 을 만족하지 않는다.
$x>0$ 이면 $2x+y=10$ ⋯⋯ ㉢
$y \ge 0$ 이면 $x=12$, $y=-14$
이것은 $y \ge 0$ 을 만족하지 않는다.
$y<0$ 이면, $x-2y=12$ ⋯⋯ ㉣
㉢, ㉣에서 $x=\frac{32}{5}$, $y=-\frac{14}{5}$
$\therefore\ x+y=\frac{18}{5}$

14. x에 관한 삼차방정식 $x^3+x^2+x+1=0$의 세 근을 α, β, γ라고 할 때, $(1-\alpha^3)(1-\beta^3)(1-\gamma^3)$의 값은?

① 4　　② 2　　③ 0　　④ -1　　⑤ -2

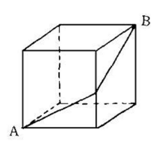
해설

$x^3+x^2+x+1=0$에서 근과 계수와의 관계에 의해
$\alpha+\beta+\gamma=-1, \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=1, \alpha\beta\gamma=-1$
또한 $x^3+x^2+x+1=0$의 양변에 $x-1$를 곱하면
$(x-1)(x^3+x^2+x+1)=0,\quad x^4=1$
$\therefore \alpha^4=\beta^4=\gamma^4=1,\quad \alpha^3=\frac{1}{\alpha}, \beta^3=\frac{1}{\beta}, \gamma^3=\frac{1}{\gamma}$
$\therefore$(준식)$=(1-\frac{1}{\alpha})(1-\frac{1}{\beta})(1-\frac{1}{\gamma})=1-(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma})+(\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\gamma\alpha})-\frac{1}{\alpha\beta\gamma}$
$=1-\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}+\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}-\frac{1}{\alpha\beta\gamma}=1+1+1+1=4$

해설

$x^3+x^2+x+1=0$을 인수분해 하면 $(x+1)(x^2+1)=0$
그러므로 $\alpha=-1, \beta=i, r=-i$라 놓을 수 있다.(순서를 바꾸어도 상관 없으므로)
$(1-\alpha^3)(1-\beta^3)(1-r^3)=(1+1)(1+i)(1-i)$
$=2(1+1)=4$

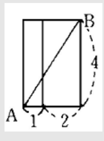
15. 다음 그림과 같이 모든 모서리의 합이 28 cm, 겉넓이가 28cm^2, 부피가 8cm^3 인 직육면체가 있다. 이 직육면체에서 면을 따라 꼭지점 A 에서 꼭짓점 B 에 이르는 가장 짧은 거리는?

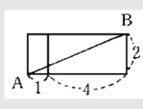


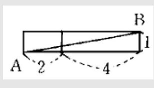
① 5cm ② 6cm ③ $2\sqrt{5}$cm
④ $\sqrt{29}$cm ⑤ $\sqrt{37}$cm

해설

각 모서리의 길이를 a, b, c 라 하면
$4(a+b+c)=28$
$2(ab+bc+ca)=28$
$abc=8$
$\therefore\ a+b+c=7$
$ab+bc+ca=14$
$abc=8$
이 때, a, b, c 를 세 근으로 하는 x 에 대한 삼차방정식은 $x^3-7x^2+14x-8=0$ $(x-1)(x-2)(x-4)=0$ 그러므로 모서리의 길이는 각각 1cm , 2cm , 4cm 이다. 이제 꼭짓점 A 에서 꼭지점 B 에 이르는 거리를전개도를 이용하여 구해 보자.

(i) 

(ii) 

(iii) 

(i) 에서 $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{3^2+4^2}=5(\mathrm{cm})$
(ii) 에서 $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{5^2+2^2}=\sqrt{29}(\mathrm{cm})$
(iii) 에서 $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{6^2+1^2}=\sqrt{37}(\mathrm{cm})$
따라서 A 에서 B 에 이르는 가장 짧은 거리는 5cm