1. 두 다항식 $x^3 + 2x^2 - x - 2$,
$(x-1)\left(3x^2 + ax + 2a\right)$ 의 최대공약수가 이차식이 되도록 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = -3$

해설

$x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x-1)(x+2)(x+1)$
$\therefore 3x^2 + ax + 2a$는
$x+2$ 또는 $x+1$을 인수로 가져야 한다.
$f(x) = 3x^2 + ax + 2a$로 놓을 때
$x+2$가 인수이면 $f(-2) = 12 - 2a + 2a = 12$가 되어 적합하지 않다.
$\therefore x+1$를 인수로 갖는다.
$x+1$이 인수이면 $f(-1) = 3 - a + 2a = 3 + a = 0$
$\therefore a = -3$

2. 다음 세 다항식에서 최대공약수를 구하면?

$2x^2 - 3x + 1,\quad 3x^2 - x - 2,\quad x^2 + 3x - 4$

① $x - 1$ ② $2x - 1$ ③ $x - 2$
④ $x + 3$ ⑤ $x + 1$

해설
$2x^2 - 3x + 1 = (2x - 1)(x - 1)$
$3x^2 - x - 2 = (3x + 2)(x - 1)$
$x^2 + 3x - 4 = (x + 4)(x - 1)$
따라서 최대 공약수는 $x - 1$이다.

3. $a^2b^3c^4$, $ab^2c^4e^3$ 의 최대공약수를 구하면?

① ab^2c^3 ② ab^2c^4 ③ ab^3c^4

④ $a^2b^3c^4$ ⑤ $ab^2c^4e^3$

해설

두 식의 공통인수 중 낮은 차수를 선택하여 곱한다.
$a^2b^3c^4$, $ab^2c^4e^3$ 에서
공통인수는 a, b, c 이고
차수가 낮은 것은 각각 a, b^2, c^4 이다.
이들을 모두 곱하면 최대공약수는 ab^2c^4

4. 두 다항식 $A = x^3 + 4x^2 - 3x - 18$, $B = x^2 - (k+2)x + 2k$ 의 최소공배수가 $(x+\alpha)^2(x+\beta)^2$ 일 때, 상수 k 의 값은?

① 2 ② −2 ③ 3 ④ −3 ⑤ −5

해설

$A = (x+3)^2(x-2)$, $B = (x-2)(x-k)$
따라서 A, B 의 최소공배수 L 은
$(x+3)^2(x-2)(x-k)$
이것이 $(x+\alpha)^2(x+\beta)^2$ 의 꼴이 되려면
$x-2 = x-k$
$\therefore\ k = 2$

5. 이차항의 계수가 1인 두 이차다항식의 최대공약수가 $x+2$, 최소공배수가 $x^3+3x^2-10x-24$라고 한다. 이 때, 두 다항식을 바르게 구한 것은?

① $x^2-x-6,\ x^2+6x+8$　　② $x^2-3x-1,\ x^2+x+8$

③ $x^2-4x+3,\ x^2-x+2$　　④ $x^2-x-2,\ x^2-3x+8$

⑤ $x^2-3x-6,\ x^2+3x+7$

해설

두 다항식을 $A=aG$, $B=bG$ ($a,\ b$는 서로소)라고 하면
두 식의 최대공약수가 $x+2$이므로
$A=a(x+2)$, $B=b(x+2)$
따라서, $L=ab(x+2)$
$\quad\quad =x^3+3x^2-10x-24$이다.
이 때, 최소공배수 L은 최대공약수 $x+2$를 인수로 가지므로
조립제법을 이용하면
$L=(x+2)(x-3)(x+4)$
$a,\ b$는 일차식이므로
$a=x-3$, $b=x+4$ 또는 $a=x+4$, $b=x-3$
따라서, 두 다항식은
$(x-3)(x+2)=x^2-x-6$과 $(x+4)(x+2)=x^2+6x+8$이다.

6. 두 다항식 x^2+x-2, x^3+2x^2-3x의 최대공약수를 $G(x)$, 최소공배수를 $L(x)$라 할 때, $G(2)+L(2)$의 값을 구하면?

① 1　　② 11　　③ 21　　④ 31　　⑤ 41

해설

$x^2+x-2=(x+2)(x-1)$
$x^3+2x^2-3x=x(x-1)(x+3)$
$\therefore G(x)=x-1$
$L(x)=x(x-1)(x+2)(x+3)$
$\therefore\ G(2)+L(2)=1+40=41$

7. 두 다항식 $f(x)$, $g(x)$가 다음 두 조건을 만족한다.

(가) $f(x)+g(x)=2x^2-2x-4$
(나) $f(x)$와 $g(x)$의 최소공배수는 x^3-7x+6

이 때, $f(x)$와 $g(x)$의 최대공약수를 $G(x)$라 할 때, $G(2)$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

두 다항식 $f(x)$와 $g(x)$의 최소공배수는

$L(x)=(x-1)(x^2+x-6)$

$\quad =(x-1)(x-2)(x+3)\cdots$㉠

또, 두 다항식 $f(x)$와 $g(x)$의 최대공약수가 $G(x)$이므로

$f(x)=G(x)A(x)$, $g(x)=G(x)B(x)$

($A(x)$, $B(x)$는 서로소)라 하면

$f(x)+g(x)=G(x)A(x)+G(x)B(x)$

$\qquad =G(x)\{A(x)+B(x)\}$이므로

$f(x)+g(x)$는 $G(x)$를 인수로 갖는다.

$f(x)+g(x)=2x^2-2x-4=2(x^2-x-2)$

$\qquad =2(x-2)(x+1)\cdots$㉡

㉠, ㉡에서 $G(x)=x-2$

$\therefore\ G(2)=0$

8. 세 다항식 $f(x)=x^2+x-2$, $g(x)=2x^2+3x-2$, $h(x)=x^2+mx+8$ 의 최대공약수가 x의 일차식일 때, m의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $m=6$

해설

$f(x)=(x+2)(x-1)$
$g(x)=(x+2)(2x-1)$ 이므로
$f(x)$와 $g(x)$의 최대공약수는 $x+2$
이것이 $h(x)$의 약수이어야 하므로
$h(-2)=4-2m+8=0$
$\therefore\ m=6$

9. 두 다항식 x^2+ax+b, $x^2+3bx+2a$의 최대공약수가 $x-1$일 때, $a+b$의 값을 구하면?

① 2 ② 1 ③ 0 ④ −1 ⑤ −2

해설
최대공약수가 $x-1$이므로
x^2+ax+b와 $x^2+3bx+2a$는
모두 $x-1$로 나누어 떨어져야 한다.
$\therefore\ 1+a+b=0$이고 $1+3b+2a=0$
따라서, $a=-2,\ b=1$
$\therefore\ a+b=-1$

10. 세 개의 다항식 x^3+ax+b, x^3+cx^2+a, cx^2+bx+4, 의 공약수 중 하나가 $x-1$일 때, $a+b+c$의 값은?

① 2　　② -2　　③ 3　　④ -3　　⑤ 4

해설

$f(x)=x^3+ax+b \to f(1)=1+a+b=0\cdots$㉠
$g(x)=x^3+cx^2+a \to g(1)=1+c+a=0\cdots$㉡
$h(x)=cx^2+bx+4 \to h(1)=c+b+4=0\cdots$㉢
㉠+㉡+㉢에서 $2(a+b+c)+6=0$
$\therefore\ a+b+c=-3$

11. 두 다항식 $f(x) = x^3 - ax + b, g(x) = x^2 + ax - 2b$ 의 최대공약수가 $x - 1$ 일 때, $f(x), g(x)$ 의 최소공배수를 구하면?

① $(x-1)^2(x+1)(x+2)$
② $(x-1)^2(x+4)(x+2)$
③ $(x-1)(x+1)^2(x+2)$
④ $(x-1)(x+4)^2(x+2)$
⑤ $(x-1)(x+4)(x+2)^2$

해설

인수정리에 의해
$f(1) = 1 - a + b = 0$
$g(1) = 1 + a - 2b = 0$
연립하면, $a = 3, b = 2$
$\therefore f(x) = x^3 - 3x + 2$
조립제법을 이용하면,
$f(x) = (x-1)^2(x+2)$
$g(x) = x^2 + 3x - 4 = (x-1)(x+4)$
$\therefore$ 최소공배수: $(x-1)^2(x+4)(x+2)$

12. 두 다항식 $A = x^3 + x^2 + ax - 2$, $B = x^3 - x^2 - ax + 4$ 의 최대공약수가 일차식일 때, 상수 a 의 값은?

① 2 ② 1 ③ 0 ④ -1 ⑤ -2

해설

최대공약수를 $x - \alpha$ 라 하자.
나머지정리에 의해 $\alpha^3 + \alpha^2 + a\alpha - 2 = 0$
$\alpha^3 - \alpha^2 - a\alpha + 4 = 0$
두 식을 더하면 $2\alpha^3 = -2, \quad \alpha = -1$
이제 $\alpha = -1$ 을 다시 A 식에 대입하면
$-1 + (-1)^2 - a - 2 = 0 \quad \therefore a = -2$

13. 두 다항식 $x^3 + 2x^2 - x - 2, 2x^3 + (a - 2)x^2 - 2x$ 의 최대공약수가 이차식이 되도록 하는 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 2$

해설

$x^3 + 2x^2 - x - 3 = x^2(x + 2) - (x + 2)$

$= (x + 2)(x - 1)(x - 2)$

$2x^3 + (a - 2)x^2 - 2x = x(2x^2 + (a - 2)x - 2) \cdots ①$

두 식의 최대 공약수가 이차식이므로

$x = -2, -1, 1$ 을 ①식에 대입하면

식의 값이 동시에 0 이 되는 경우가 있어야 한다.

$x = -2$ 일 때, $8 - 2a + 4 - 2 = 0,\ a = 5$

$x = -1$ 일 때, $2 - a + 2 - 2 = 0,\ a = 2$

$x = 1$ 일 때, $2 + a - 2 - 2 = 0,\ a = 2$

$x = -1,\ 1$ 일때, 일치함

최대 공약수는 $(x + 1)(x - 1)$

$\therefore\ a = 2$

14. 최대공약수가 $x+1$ 인 두 다항식 x^2+3x+a, x^2+ax-b 의 최소공배수를 $L(x)$ 라 할 때, $L(1)$ 의 값은?

① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

해설

최대공약수가 $x+1$ 이므로
두 다항식에 $x=-1$ 을 대입하면 0이 된다.
$1-3+a=0 \therefore a=2$
$1-a-b=0 \quad \therefore b=-1$
따라서 두 다항식은 각각
$x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$
$x^2+2x+1=(x+1)^2$
최소공배수 $L(x)$ 는 $(x+1)^2(x+2)$
$\therefore L(1)=(1+1)^2(1+2)=12$