

1. 두 다항식 $x^3 + 2x^2 - x - 2$,
 $(x-1)(3x^2 + ax + 2a)$ 의 최대공약수가 이차식이 되도록 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = -3$

해설

$$x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x-1)(x+2)(x+1)$$

$$\therefore 3x^2 + ax + 2a \text{ 는}$$

$x+2$ 또는 $x+1$ 을 인수로 가져야 한다.

$f(x) = 3x^2 + ax + 2a$ 로 놓을 때

$x+2$ 가 인수이면 $f(-2) = 12 - 2a + 2a = 12$ 가 되어 적합하지 않다.

$\therefore x+1$ 를 인수로 갖는다.

$$x+1 \text{ 이 인수이면 } f(-1) = 3 - a + 2a = 3 + a = 0$$

$$\therefore a = -3$$

2. 다음 세 다항식에서 최대공약수를 구하면?

$$2x^2 - 3x + 1, \quad 3x^2 - x - 2, \quad x^2 + 3x - 4$$

① $x - 1$

② $2x - 1$

③ $x - 2$

④ $x + 3$

⑤ $x + 1$

해설

$$2x^2 - 3x + 1 = (2x - 1)(x - 1)$$

$$3x^2 - x - 2 = (3x + 2)(x - 1)$$

$$x^2 + 3x - 4 = (x + 4)(x - 1)$$

따라서 최대 공약수는 $x - 1$ 이다.

3. $a^2b^3c^4$, $ab^2c^4e^3$ 의 최대공약수를 구하면?

① ab^2c^3

② ab^2c^4

③ ab^3c^4

④ $a^2b^3c^4$

⑤ $ab^2c^4e^3$

해설

두 식의 공통인수 중 낮은 차수를 선택하여 곱한다.

$a^2b^3c^4$, $ab^2c^4e^3$ 에서

공통인수는 a, b, c 이고

차수가 낮은 것은 각각 a , b^2 , c^4 이다.

이들을 모두 곱하면 최대공약수는 ab^2c^4

4. 두 다항식 $A = x^3 + 4x^2 - 3x - 18$, $B = x^2 - (k+2)x + 2k$ 의 최소공배수가 $(x+\alpha)^2(x+\beta)^2$ 일 때, 상수 k 의 값은?

① 2

② -2

③ 3

④ -3

⑤ -5

해설

$$A = (x+3)^2(x-2), B = (x-2)(x-k)$$

따라서 A, B 의 최소공배수 L 은

$$(x+3)^2(x-2)(x-k)$$

이것이 $(x+\alpha)^2(x+\beta)^2$ 의 꼴이 되려면

$$x-2 = x-k$$

$$\therefore k = 2$$

5. 이차항의 계수가 1인 두 이차다항식의 최대공약수가 $x+2$, 최소공배수가 $x^3 + 3x^2 - 10x - 24$ 라고 한다. 이 때, 두 다항식을 바르게 구한 것은?

- ① $x^2 - x - 6, x^2 + 6x + 8$ ② $x^2 - 3x - 1, x^2 + x + 8$
③ $x^2 - 4x + 3, x^2 - x + 2$ ④ $x^2 - x - 2, x^2 - 3x + 8$
⑤ $x^2 - 3x - 6, x^2 + 3x + 7$

해설

두 다항식을 $A = aG, B = bG$ (a, b 는 서로소)라고 하면
두 식의 최대공약수가 $x+2$ 이므로

$$A = a(x+2), B = b(x+2)$$

따라서, $L = ab(x+2)$

$$= x^3 + 3x^2 - 10x - 24 \text{이다.}$$

이 때, 최소공배수 L 은 최대공약수 $x+2$ 를 인수로 가지므로
조립제법을 이용하면

$$L = (x+2)(x-3)(x+4)$$

a, b 는 일차식이므로

$$a = x-3, b = x+4 \text{ 또는 } a = x+4, b = x-3$$

따라서, 두 다항식은

$$(x-3)(x+2) = x^2 - x - 6 \text{ 과 } (x+4)(x+2) = x^2 + 6x + 8 \text{이다.}$$

6. 두 다항식 $x^2 + x - 2$, $x^3 + 2x^2 - 3x$ 의 최대공약수를 $G(x)$, 최소공배수를 $L(x)$ 라 할 때, $G(2) + L(2)$ 의 값을 구하면?

① 1

② 11

③ 21

④ 31

⑤ 41

해설

$$x^2 + x - 2 = (x + 2)(x - 1)$$

$$x^3 + 2x^2 - 3x = x(x - 1)(x + 3)$$

$$\therefore G(x) = x - 1$$

$$L(x) = x(x - 1)(x + 2)(x + 3)$$

$$\therefore G(2) + L(2) = 1 + 40 = 41$$

7. 두 다항식 $f(x)$, $g(x)$ 가 다음 두 조건을 만족한다.

$$(가) \quad f(x) + g(x) = 2x^2 - 2x - 4$$

$$(나) \quad f(x) \text{와 } g(x) \text{의 최소공배수는 } x^3 - 7x + 6$$

이 때, $f(x)$ 와 $g(x)$ 의 최대공약수를 $G(x)$ 라 할 때, $G(2)$ 의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

두 다항식 $f(x)$ 와 $g(x)$ 의 최소공배수는

$$L(x) = (x-1)(x^2 + x - 6)$$

$$= (x-1)(x-2)(x+3) \cdots \textcircled{㉠}$$

또, 두 다항식 $f(x)$ 와 $g(x)$ 의 최대공약수가 $G(x)$ 이므로

$$f(x) = G(x)A(x), \quad g(x) = G(x)B(x)$$

$A(x)$, $B(x)$ 는 서로소라 하면

$$f(x) + g(x) = G(x)A(x) + G(x)B(x)$$

$$= G(x)\{A(x) + B(x)\} \text{이므로}$$

$f(x) + g(x)$ 는 $G(x)$ 를 인수로 갖는다.

$$f(x) + g(x) = 2x^2 - 2x - 4 = 2(x^2 - x - 2)$$

$$= 2(x-2)(x+1) \cdots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠}$, $\textcircled{㉡}$ 에서 $G(x) = x-2$

$$\therefore G(2) = 0$$

8. 세 다항식 $f(x) = x^2 + x - 2$, $g(x) = 2x^2 + 3x - 2$, $h(x) = x^2 + mx + 8$ 의 최대공약수가 x 의 일차식일 때, m 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $m = 6$

해설

$$f(x) = (x + 2)(x - 1)$$

$$g(x) = (x + 2)(2x - 1) \text{ 이므로}$$

$f(x)$ 와 $g(x)$ 의 최대공약수는 $x + 2$

이것이 $h(x)$ 의 약수이어야 하므로

$$h(-2) = 4 - 2m + 8 = 0$$

$$\therefore m = 6$$

9. 두 다항식 $x^2 + ax + b$, $x^2 + 3bx + 2a$ 의 최대공약수가 $x - 1$ 일 때, $a + b$ 의 값을 구하면?

① 2

② 1

③ 0

④ -1

⑤ -2

해설

최대공약수가 $x - 1$ 이므로

$x^2 + ax + b$ 와 $x^2 + 3bx + 2a$ 는

모두 $x - 1$ 로 나누어 떨어져야 한다.

$\therefore 1 + a + b = 0$ 이고 $1 + 3b + 2a = 0$

따라서, $a = -2$, $b = 1$

$\therefore a + b = -1$

10. 세 개의 다항식 $x^3 + ax + b$, $x^3 + cx^2 + a$, $cx^2 + bx + 4$, 의 공약수 중 하나가 $x - 1$ 일 때, $a + b + c$ 의 값은?

① 2

② -2

③ 3

④ -3

⑤ 4

해설

$$f(x) = x^3 + ax + b \rightarrow f(1) = 1 + a + b = 0 \cdots \textcircled{\text{㉠}}$$

$$g(x) = x^3 + cx^2 + a \rightarrow g(1) = 1 + c + a = 0 \cdots \textcircled{\text{㉡}}$$

$$h(x) = cx^2 + bx + 4 \rightarrow h(1) = c + b + 4 = 0 \cdots \textcircled{\text{㉢}}$$

$$\textcircled{\text{㉠}} + \textcircled{\text{㉡}} + \textcircled{\text{㉢}} \text{에서 } 2(a + b + c) + 6 = 0$$

$$\therefore a + b + c = -3$$

11. 두 다항식 $f(x) = x^3 - ax + b, g(x) = x^2 + ax - 2b$ 의 최대공약수가 $x - 1$ 일 때, $f(x), g(x)$ 의 최소공배수를 구하면?

① $(x - 1)^2(x + 1)(x + 2)$

② $(x - 1)^2(x + 4)(x + 2)$

③ $(x - 1)(x + 1)^2(x + 2)$

④ $(x - 1)(x + 4)^2(x + 2)$

⑤ $(x - 1)(x + 4)(x + 2)^2$

해설

인수정리에 의해

$$f(1) = 1 - a + b = 0$$

$$g(1) = 1 + a - 2b = 0$$

연립하면, $a = 3, b = 2$

$$\therefore f(x) = x^3 - 3x + 2$$

조립제법을 이용하면,

$$f(x) = (x - 1)^2(x + 2)$$

$$g(x) = x^2 + 3x - 4 = (x - 1)(x + 4)$$

$$\therefore \text{최소공배수: } (x - 1)^2(x + 4)(x + 2)$$

12. 두 다항식 $A = x^3 + x^2 + ax - 2$, $B = x^3 - x^2 - ax + 4$ 의 최대공약수가 일차식일 때, 상수 a 의 값은?

① 2

② 1

③ 0

④ -1

⑤ -2

해설

최대공약수를 $x - \alpha$ 라 하자.

나머지정리에 의해 $\alpha^3 + \alpha^2 + a\alpha - 2 = 0$

$$\alpha^3 - \alpha^2 - a\alpha + 4 = 0$$

두 식을 더하면 $2\alpha^3 = -2$, $\alpha = -1$

이제 $\alpha = -1$ 을 다시 A 식에 대입하면

$$-1 + (-1)^2 - a - 2 = 0 \quad \therefore a = -2$$

13. 두 다항식 $x^3 + 2x^2 - x - 2, 2x^3 + (a - 2)x^2 - 2x$ 의 최대공약수가 이차식이 되도록 하는 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 2$

해설

$$x^3 + 2x^2 - x - 3 = x^2(x + 2) - (x + 2)$$

$$= (x + 2)(x - 1)(x - 2)$$

$$2x^3 + (a - 2)x^2 - 2x = x(2x^2 + (a - 2)x - 2) \cdots \textcircled{1}$$

두 식의 최대 공약수가 이차식이므로

$x = -2, -1, 1$ 을 ①식에 대입하면

식의 값이 동시에 0이 되는 경우가 있어야 한다.

$$x = -2 \text{ 일 때, } 8 - 2a + 4 - 2 = 0, a = 5$$

$$x = -1 \text{ 일 때, } 2 - a + 2 - 2 = 0, a = 2$$

$$x = 1 \text{ 일 때, } 2 + a - 2 - 2 = 0, a = 2$$

$x = -1, 1$ 일때, 일치함

최대 공약수는 $(x + 1)(x - 1)$

$$\therefore a = 2$$

14. 최대공약수가 $x + 1$ 인 두 다항식 $x^2 + 3x + a$, $x^2 + ax - b$ 의 최소공배수를 $L(x)$ 라 할 때, $L(1)$ 의 값은?

① 6

② 8

③ 10

④ 12

⑤ 14

해설

최대공약수가 $x + 1$ 이므로

두 다항식에 $x = -1$ 을 대입하면 0 이 된다.

$$1 - 3 + a = 0 \therefore a = 2$$

$$1 - a - b = 0 \therefore b = -1$$

따라서 두 다항식은 각각

$$x^2 + 3x + 2 = (x + 1)(x + 2)$$

$$x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$$

최소공배수 $L(x)$ 는 $(x + 1)^2(x + 2)$

$$\therefore L(1) = (1 + 1)^2(1 + 2) = 12$$