1. $\sqrt{-12} + \sqrt{-3}\sqrt{-6} - \dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{-2}} = a + bi$ 일 때, $a^2 + b^2$ 의 값은? (단, a, b 는 실수, $i = \sqrt{-1}$)

① 15 ② 25 ③ 35 ④ 45 ⑤ 55

해설

$\sqrt{-12} + \sqrt{-3}\sqrt{-6} - \dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{-2}}$

$= 2\sqrt{3}i - 3\sqrt{2} + \sqrt{3}i$

$= -3\sqrt{2} + 3\sqrt{3}i$

$= a + bi$

따라서, $a = -3\sqrt{2}, b = 3\sqrt{3}$

$\therefore\ a^2 + b^2 = 18 + 27 = 45$

2. 다음 보기에서 옳은 것을 모두 고르면?

㉠ $\sqrt{-2} \cdot \sqrt{-3} = -\sqrt{-6}$

㉡ $\dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{-3}} = 3i$

㉢ $\sqrt{-27} - \sqrt{-3} = 2\sqrt{3}i$

㉣ $\dfrac{4}{\sqrt{-4}} = -2i$

㉤ $\sqrt{-2} \cdot \sqrt{5} = -\sqrt{10}$

㉥ $\sqrt{(-3)^2} + (\sqrt{-3})^2 = 6$

① ㉠,㉡　　② ㉢,㉣　　③ ㉠,㉣,㉤

④ ㉣,㉥　　⑤ ㉠,㉡,㉢,㉣,㉥

해설

㉠ $\sqrt{-2} \cdot \sqrt{-3} = \sqrt{2}i \times \sqrt{3}i = -\sqrt{6}$

㉡ $\dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{-3}} = \dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}i} = -3i$

㉢ $\sqrt{-27} - \sqrt{-3} = 3\sqrt{3}i - \sqrt{3}i = 2\sqrt{3}i$

㉣ $\dfrac{4}{\sqrt{-4}} = \dfrac{4}{2i} = -2i$

㉤ $\sqrt{-2} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{2}i \times \sqrt{5} = \sqrt{10}i$

㉥ $\sqrt{(-3)^2} + (\sqrt{-3})^2 = \sqrt{9} + (\sqrt{3}i)^2 = 0$

3. 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① -2의 제곱근은 $\sqrt{2}i$와 $-\sqrt{2}i$이다.

② $\sqrt{-2}\times\sqrt{-3}=-\sqrt{(-2)(-3)}$

③ $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{-4}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$

④ $\dfrac{\sqrt{-8}}{\sqrt{-2}}=\sqrt{\dfrac{-8}{-2}}$

⑤ $-\sqrt{-16}=-4i$

해설

③ $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{-4}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2i}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$

4. α,β 가 복소수일 때, 다음 중 옳은 것을 모두 고르면? (단, $\overline{\beta}$ 는 β 의 켤레복소수이고 $i = \sqrt{-1}$)

보기

㉠ $\alpha = \overline{\beta}$ 이면 $\alpha+\beta, \alpha\beta$ 는 모두 실수이다.

㉡ $\alpha = \overline{\beta}$ 일 때, $\alpha\beta = 0$ 이면 $\alpha = 0$ 이다.

㉢ $\alpha^2 + \beta^2 = 0$ 이면 $\alpha = 0, \beta = 0$ 이다.

① ㉠　② ㉠ ,㉡　③ ㉡ ,㉢
④ ㉠ ,㉢　⑤ ㉠ ,㉡ ,㉢

해설

$\alpha = a + bi \Rightarrow \overline{\beta} = a + bi$
㉠ $\alpha+\beta = (a+bi)+(a-bi) = 2a$ 는 실수 (T), $\alpha\beta = a^2+b^2 =$ 실수
㉡ $\alpha\beta = a^2 + b^2 = 0 \Rightarrow a = 0, b = 0$
$\therefore \alpha = 0$ (T)
㉢ 반례 : $\alpha = 1, \beta = i$ 일 때, $\alpha^2 + \beta^2 = 0$

5. 다음 보기 중 옳은 것의 개수는? (단, $i = \sqrt{-1}$)

㉠ 16의 제곱근은 4이다.

㉡ 실수를 제곱하면 양수 또는 0이다.

㉢ 복소수 $z = a + bi$ (a, b는 실수)에 대하여 $z + \bar{z}$ 는 실수이다. (단, $\bar{z}$는 z의 켤레복소수)

㉣ 복소수 $z = a + bi$ (a, b는 실수)에 대하여 $z\bar{z}$는 실수이다. (단, $\bar{z}$는 z의 켤레복소수이다.)

㉤ 복소수 $z = a + bi$ (a, b는 실수)에 대하여 $z = \bar{z}$이면 z는 실수이다. (단, $\bar{z}$는 z의 켤레복소수이다.)

① 1개　② 2개　③ 3개　④ 4개　⑤ 5개

해설

㉠ 제곱해서 16 이 되는 수 $4, -4$ $\therefore$ 거짓
㉡ 실수는 제곱하면 0보다 크거나 같다. $\therefore$ 참
㉢ $z = a + bi$, $\bar{z} = a - bi$, $z + \bar{z} = 2a$ $\therefore$ 참
㉣ $z\bar{z} = a^2 + b^2$ $\therefore$ 참
㉤ $z = \bar{z}$, $a + bi = a - bi$, $2bi = 0$, $b = 0$ $\therefore$ $z = a = \bar{z}$ $\therefore$ 참

6. 다음은 두 복소수 z_1, z_2에 대하여 '$z_1 \cdot z_2 = 0$이면 $z_1 = 0$ 또는 $z_2 = 0$'임을 보인 것이다.

> $z_1 = a + bi,\ z_2 = c + di$ ($a,\ b,\ c,\ d$는 실수) 라고 하자.
> $z_1 z_2 = 0$이면 $(a+bi)(c+di) = 0$
> 이 식의 양변에 $(a-bi)(c-di)$를 곱하면
> (좌변) $= (a+bi)(c+di)(a-bi)(c-di)$
> $\qquad = (a+bi)(a-bi)(c+di)(c-di)$
> $\qquad = (a^2+b^2)(c^2+d^2)$
> (우변) $= 0 \cdot (a-bi)(c-di) = 0$
> $\therefore\ (a^2+b^2)(c^2+d^2) = 0$
> 따라서 $a^2+b^2 = 0$ 또는 $c^2+d^2 = 0$이므로
> $a = b = 0$ 또는 $c = d = 0$
> $\therefore\ z_1 = 0$ 또는 $z_2 = 0$

다음 중 위의 과정에 이용되지 않는 성질은?

① 두 실수 $x,\ y$에 대하여 $x^2 + y^2 = 0$이면 $x = y = 0$이다.

② 두 실수 $x,\ y$에 대하여 $xy = 0$이면 $x = 0$ 또는 $y = 0$이다.

③ 두 실수 $x,\ y$에 대하여 $x + yi = 0$이면 $x = y = 0$이다.

④ 임의의 복소수 α에 대하여 $0 \cdot \alpha = 0$이다.

⑤ 복소수 $\alpha,\ \beta$에 대하여 $\alpha\beta = \beta\alpha$이다.

해설

$z_1 = a + bi,\ z_2 = c + di$ ($a,\ b,\ c,\ d$ 는 실수) 라고 하자.
$z_1 z_2 = 0$이면 $(a+bi)(c+di) = 0$
(좌변) $= (a+bi)(c+di)(a-bi)(c-di)$ ⋯ ⑤
$\qquad = (a+bi)(a-bi)(c+di)(c-di)$
$\qquad = (a^2+b^2)(c^2+d^2)$
(우변) $= 0 \cdot (a-bi)(c-di) = 0$ ⋯ ④
$\qquad \therefore\ (a^2+b^2)(c^2+d^2) = 0$ ⋯ ②
따라서 $a^2+b^2 = 0$ 또는 $c^2+d^2 = 0$ 이므로 ⋯ ①
$a = b = 0$ 또는 $c = d = 0$ ⋯ ③의 역
$\therefore\ a + bi = 0$ 또는 $c + di = 0$
즉, 이 과정에서 ③의 역은 이용되었지만, ③은 이용되지 않았다.

7. $\alpha = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 일 때, $\alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^{14}$ 의 값은?

① -1 ② $-\dfrac{1}{2}$ ③ 0 ④ $\dfrac{1}{2}$ ⑤ 1

해설

$\alpha = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 에서 $2\alpha + 1 = \sqrt{3}i$

양변을 제곱해서 정리하면 $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$

$(\alpha - 1)(\alpha^2 + \alpha + 1) = 0, \alpha^3 = 1$

$\therefore\ \alpha^{3k+1} = \alpha, \alpha^{3k+2} = \alpha^2, \alpha^{3k} = 1$

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= (\alpha + \alpha^2 + 1) + (\alpha + \alpha^2 + 1) + \\ &\cdots + (\alpha + \alpha^2 + 1) + \alpha + \alpha^2 \\ &= \alpha + \alpha^2 \\ &= -1\end{aligned}$$

$(\because\ \alpha^2 + \alpha + 1 = 0)$

8. 방정식 $x^2+x+1=0$ 의 한 근을 w 라 할 때, $\dfrac{1}{2w^3+3w^2+4w}=aw+b$ 를 만족하는 실수 $a+b$ 의 값을 구하면?

① -1　② -2　③ 2　④ 1　⑤ $\dfrac{1}{3}$

해설

$x^2+x+1=0$ 의 한 근을 w (허근)라 하고, $w^2+w+1=0$ 에서 양변에 $w-1$ 을 곱하면,

$w^3-1=0 \qquad \therefore\ w^3=1$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2w^3+3w^2+4w} &= \frac{1}{3w^2+4w+2}\\ &= \frac{1}{3(w^2+w+1)+w-1}\\ &= \frac{1}{w-1}\\ &= \frac{w+2}{(w-1)(w+2)}\\ &= \frac{w+2}{w^2+w-2}\\ &= \frac{w+2}{-3}\\ &= -\frac{1}{3}w-\frac{2}{3}\end{aligned}$$

$\therefore\ -\dfrac{1}{3}w-\dfrac{2}{3}=aw+b$ 에서

a, b 가 실수, w 는 허수이므로

$a=-\dfrac{1}{3},\ b=-\dfrac{2}{3} \qquad \therefore\ a+b=-1$

9. $z = \dfrac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$ 에 대하여 $z^{2005} + \bar{z}^{2005}$ 의 값을 구하면?

① $\dfrac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$　② -1　③ $\dfrac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$

④ 1　⑤ $\sqrt{3}i$

해설

$z = \dfrac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$, $\bar{z} = \dfrac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$

$2z + 1 = \sqrt{3}i$ 에서 양변을 제곱해서 정리하면

$z^2 + z + 1 = 0$, $(z - 1)(z^2 + z + 1) = 0$

$\therefore z^3 = 1,\ \ \bar{z}^3 = 1$

$$\begin{aligned} z^{2005} + \bar{z}^{2005} &= (z^3)^{668} \cdot z + (\bar{z}^3)^{668} \cdot \bar{z} \\ &= z + \bar{z} \\ &= -1 \end{aligned}$$