

1. 복소수 $z = a + bi$ (단, a, b 는 실수, $i = \sqrt{-1}$)를 좌표평면 위의 점 $P(a, b)$ 에 대응시킬 때, $(2 - 3i)z$ 가 실수가 되게 하는 점 P 가 그리는 도형은?
- ① 원 ② 아래로 볼록한 포물선
③ 위로 볼록한 포물선 ④ 기울기가 음인 직선
⑤ 기울기가 양인 직선

해설

$$\begin{aligned}(2-3i)z &= (2-3i)(a+bi) \\ &= (2a+3b) + (2b-3a)i \\ \therefore 2b-3a &= 0 \quad \therefore b = \frac{3}{2}a \Rightarrow \text{기울기가 양인 직선}\end{aligned}$$

2. $\sqrt{-x^2(x^2-1)^2}$ 이 실수가 되는 서로 다른 실수 x 들의 총합은?

- ① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$$\begin{aligned}\sqrt{-x^2(x^2-1)^2} &= \sqrt{x^2(x^2-1)^2}i \\ &= \sqrt{x^2}\sqrt{(x^2-1)^2}i \\ &= |x| \cdot |x^2-1| i \\ &= |x| \cdot |x+1| |x-1| i\end{aligned}$$

그러므로 $x = 0, 1, -1$ 일 때 총합은 0이 된다.

3. 실수가 아닌 복소수 z 에 대하여 $\frac{z}{1+z^2}$ 가 실수이기 위한 조건은?

(단, $z \neq \pm i$ 이고 $\bar{z}$ 는 z 의 켈레복소수이다.)

- ① $z \cdot \bar{z} = 1$
- ② $z + \bar{z} = 0$
- ③ $z + \bar{z} = 1$
- ④ $z + \bar{z} = -1$
- ⑤ $(z + 1)(\bar{z} + 1) = 1$

해설

$\frac{z}{1+z^2}$ 가 실수이면

$$\frac{z}{1+z^2} = \overline{\left(\frac{z}{1+z^2}\right)} = \frac{\bar{z}}{1+\bar{z}^2}$$

$$\frac{z}{1+z^2} - \frac{\bar{z}}{1+\bar{z}^2} = 0$$

$$\frac{z(1+\bar{z}^2) - \bar{z}(1+z^2)}{(1+z^2)(1+\bar{z}^2)} = 0$$

$$\frac{(z - \bar{z}) - z\bar{z}(z - \bar{z})}{(1+z^2)(1+\bar{z}^2)} = 0$$

$$\frac{(z - \bar{z})(1 - z\bar{z})}{(1+z)(1+\bar{z}^2)} = 0$$

(분모) $\neq 0$ 이므로

$$(\text{분자}) = (z - \bar{z})(1 - z\bar{z}) = 0$$

z 가 실수가 아니므로 $z \neq \bar{z}$

$$\therefore z\bar{z} = 1$$

4. $\alpha = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$ 일 때, $\alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^{14}$ 의 값은?

- ① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

해설

$$\alpha = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \text{ 에서 } 2\alpha + 1 = \sqrt{3}i$$

양변을 제곱해서 정리하면 $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$

$$(\alpha - 1)(\alpha^2 + \alpha + 1) = 0, \alpha^3 = 1$$

$$\therefore \alpha^{3k+1} = \alpha, \alpha^{3k+2} = \alpha^2, \alpha^{3k} = 1$$

$$\begin{aligned} (\text{준식}) &= (\alpha + \alpha^2 + 1) + (\alpha + \alpha^2 + 1) + \\ &\quad \cdots + (\alpha + \alpha^2 + 1) + \alpha + \alpha^2 \\ &= \alpha + \alpha^2 \\ &= -1 \end{aligned}$$

$$(\because \alpha^2 + \alpha + 1 = 0)$$

5. $x = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}$ 일 때, $x^4 - 3x^3 + 3x - 2$ 의 값은?

① $2 + \sqrt{3}i$

② $2 - \sqrt{3}i$

③ $3 + \sqrt{3}i$

④ $-3 + \sqrt{3}i$

⑤ $3 - \sqrt{3}i$

해설

$$x = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}, 2x = 1 + \sqrt{3}i, 2x - 1 = \sqrt{3}i$$

$$4x^2 - 4x + 1 = -3$$

$$4x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$x^2 - x + 1 = 0$$

$x^4 - 3x^3 + 3x - 2$ 를 $x^2 - x + 1$ 로 나누면

$$x^4 - 3x^3 + 3x - 2$$

$$= (x^2 - x + 1)(x^2 - 2x - 3) + 2x + 1$$

$$= 0 + 2x + 1$$

$$= 2 \times \frac{1 + \sqrt{3}i}{2} + 1$$

$$= 2 + \sqrt{3}i$$

6. 복소수 $z = \frac{1 + \sqrt{3}i}{1 - \sqrt{3}i}$ 에 대하여 $(3z^2 + z)^2 + (z^2 + 3z)^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$z = \frac{1 + \sqrt{3}i}{1 - \sqrt{3}i} = \frac{(1 + \sqrt{3}i)^2}{(1 - \sqrt{3}i)(1 + \sqrt{3}i)} \\ = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$$

$$z^2 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} \\ (3z^2 + z)^2 + (z^2 + 3z)^2 \\ = \left(\frac{-3 - 3\sqrt{3}i - 1 + \sqrt{3}i}{2} \right)^2 \\ + \left(\frac{-1 - \sqrt{3}i - 3 + 3\sqrt{3}i}{2} \right)^2 \\ = (-2 - \sqrt{3}i)^2 + (-2 + \sqrt{3}i)^2 \\ = 4 + 4\sqrt{3}i - 3 + 4 - 4\sqrt{3}i - 3 = 2$$

해설

$$z = \frac{1 + \sqrt{3}i}{1 - \sqrt{3}i} \\ = \frac{(1 + \sqrt{3}i)^2}{(1 - \sqrt{3}i)(1 + \sqrt{3}i)} \\ = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$$

에서 양변에 2를 곱하고 -1 을 우변으로 이항하면 $2z + 1 = \sqrt{3}i$ 양변을 제곱하면

$$4z^2 + 4z + 1 = -3$$

$$\rightarrow 4z^2 + 4z + 4 = 0$$

$$\rightarrow z^2 + z + 1 = 0$$

$$\rightarrow (z - 1)(z^2 + z + 1) = 0$$

$$\rightarrow z^3 - 1 = 0$$

$$\rightarrow z^3 = 1$$

※방정식에 익숙한 학생들은

$$z = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \text{ 에서 바로 } z^2 + z + 1 = 0 \text{ 와 } z^3 = 1 \text{ 을 도출할 수}$$

있을 것이다.

$$(3z^2 + z)^2 + (z^2 + 3z)^2$$

$$= 10z^4 + 12z^3 + 10z^2$$

$$= (10z^4 + 10z^3 + 10z^2) + 2z^3$$

$$= 10z^2(z^2 + z + 1) + 2z^3$$

$$= 0 + 2$$

$$= 2$$