1. $\sqrt{-12} + \sqrt{-3}\sqrt{-6} - \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{-2}} = a + bi$ 일 때, $a^2 + b^2$ 의 값은? (단, a, b 는 실수, $i = \sqrt{-1}$)

① 15

② 25

③ 35

④ 45

⑤ 55

해설

$$\sqrt{-12} + \sqrt{-3}\sqrt{-6} - \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{-2}}$$

$$= 2\sqrt{3}i - 3\sqrt{2} + \sqrt{3}i$$

$$= -3\sqrt{2} + 3\sqrt{3}i$$

$$= a + bi$$

$$\text{따라서, } a = -3\sqrt{2}, b = 3\sqrt{3}$$

$$\therefore a^2 + b^2 = 18 + 27 = 45$$

2. 다음 보기에서 옳은 것을 모두 고르면?

$$\text{㉠ } \sqrt{-2} \cdot \sqrt{-3} = -\sqrt{-6}$$

$$\text{㉡ } \frac{\sqrt{27}}{\sqrt{-3}} = 3i$$

$$\text{㉢ } \sqrt{-27} - \sqrt{-3} = 2\sqrt{3}i$$

$$\text{㉣ } \frac{4}{\sqrt{-4}} = -2i$$

$$\text{㉤ } \sqrt{-2} \cdot \sqrt{5} = -\sqrt{10}$$

$$\text{㉥ } \sqrt{(-3)^2} + (\sqrt{-3})^2 = 6$$

① ㉠,㉡

② ㉢,㉣

③ ㉠,㉣,㉤

④ ㉣,㉥

⑤ ㉠,㉡,㉢,㉣,㉥

해설

$$\text{㉠ } \sqrt{-2} \cdot \sqrt{-3} = \sqrt{2}i \times \sqrt{3}i = -\sqrt{6}$$

$$\text{㉡ } \frac{\sqrt{27}}{\sqrt{-3}} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}i} = -3i$$

$$\text{㉢ } \sqrt{-27} - \sqrt{-3} = 3\sqrt{3}i - \sqrt{3}i = 2\sqrt{3}i$$

$$\text{㉣ } \frac{4}{\sqrt{-4}} = \frac{4}{2i} = -2i$$

$$\text{㉤ } \sqrt{-2} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{2}i \times \sqrt{5} = \sqrt{10}i$$

$$\text{㉥ } \sqrt{(-3)^2} + (\sqrt{-3})^2 = \sqrt{9} + (\sqrt{3}i)^2 = 0$$

3. $\frac{1}{\sqrt{-2} - \sqrt{-1}}$ 의 값은 ?

① $1 - \sqrt{2}$

② $-1 - \sqrt{2}$

③ $(1 + \sqrt{2})i$

④ $-(1 + \sqrt{2})i$

⑤ $(1 - \sqrt{2})i$

해설

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{-2} - \sqrt{-1}} &= \frac{1}{\sqrt{2} - 1} \times \frac{1}{i} \\ &= (\sqrt{2} + 1) \times (-i) \\ &= -(1 + \sqrt{2})i\end{aligned}$$

4. 두 실수 a, b 에 대하여 $\sqrt{-32} - \sqrt{-8}\sqrt{-3} + \frac{\sqrt{24}}{\sqrt{-3}} = a + bi$ 일 때, $\frac{1}{2}ab$ 의 값은?
(단, $i = \sqrt{-1}$)

① $-\sqrt{3}$

② $2\sqrt{3}$

③ $-3\sqrt{3}$

④ $4\sqrt{3}$

⑤ $-4\sqrt{3}$

해설

$$\sqrt{-32} - \sqrt{-8}\sqrt{-3} + \frac{\sqrt{24}}{\sqrt{-3}}$$

$$= 4\sqrt{2}i + \sqrt{24} - \sqrt{8}i$$

$$= 4\sqrt{2}i + 2\sqrt{6} - 2\sqrt{2}i$$

$$= 2\sqrt{6} + 2\sqrt{2}i$$

$$a = 2\sqrt{6}, b = 2\sqrt{2}$$

$$\therefore \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{6} \times 2\sqrt{2} = 4\sqrt{3}$$

5. $x = 2007$, $y = 4331$ 일 때, $\frac{x+yi}{y-xi} + \frac{y-xi}{x+yi}$ 의 값은?

① 0

② 1

③ -1

④ i

⑤ $-i$

해설

$$\begin{aligned} & \frac{x+yi}{y-xi} + \frac{y-xi}{x+yi} \\ &= \frac{(x+yi)^2 + (y-xi)^2}{(y-xi)(x+yi)} \\ &= \frac{x^2 + 2xyi - y^2 + y^2 - 2xyi - x^2}{(y-xi)(x+yi)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

해설

$$\begin{aligned} & \frac{x+yi}{y-xi} + \frac{y-xi}{x+yi} \\ &= \frac{i(y-xi)}{y-xi} + \frac{-i(x+yi)}{x+yi} \\ &= i + (-i) \\ &= 0 \end{aligned}$$

6. $i^2 = -1$ 일 때, $(n+i)^4$ 이 정수가 되도록 하는 정수 n 의 개수는?

① 0개

② 1개

③ 2개

④ 3개

⑤ 4개

해설

$$(n+i)^4 = \{(n+i)^2\}^2 = (n^2 - 1 + 2ni)^2$$

이것이 정수가 되려면 $n^2 - 1 + 2ni$ 가 정수가 되거나 순허수가 되어야 한다.

i) $n = 0$ 일 때 성립

ii) $n^2 - 1 = 0$, $n = \pm 1$ 일 때 성립

따라서 구하는 정수의 개수는 3개

해설

$$(n+i)^4 = n^4 - 6n^2 + 1 + i(4n^3 - 4n)$$

이것이 실수이려면, $4n^3 - 4n = 0$, $n = 0$, ± 1

이 때 $(n+i)^4$ 은 모두 정수가 되므로, $(n+i)^4$ 이 정수가 되도록 하는 정수 n 의 개수는 3 개다.

7. $\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} = -\sqrt{\frac{y}{x}}$ 가 성립할 때,

$\sqrt{(y-x+1)^2} + {}^3\sqrt{x^3 - y^3 - 3xy(x-y)} + |x|$ 를 간단히 하면?

① $x - 1$

② $-x + 1$

③ $2y - 3x + 1$

④ $3x - 2y - 1$

⑤ $-3x - 2y - 1$

해설

$$\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} = -\sqrt{\frac{y}{x}} \text{ 일 때, } y \geq 0, x < 0$$

$$\begin{aligned} (\text{준식}) &= |y - x + 1| + {}^3\sqrt{(x - y)^3} + |x| \\ &= y - x + 1 + x - y - x = -x + 1 \end{aligned}$$

8. $\sqrt{a}\sqrt{b} = -\sqrt{ab}$, $\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{b}} = -\sqrt{\frac{c}{b}}$, $|a+b| > |c|$ 인 a, b, c 에 대하여 $\sqrt{(a+b+c)^2} - |a+b| - \sqrt{c^2}$ 의 값은?

① $2a$

② $2b$

③ $-2c$

④ $-2a$

⑤ $-3b$

해설

$$\sqrt{a}\sqrt{b} = -\sqrt{ab} \text{ 이므로, } a \leq 0, b \leq 0$$

$$\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{b}} = -\sqrt{\frac{c}{b}} \text{ 이므로, } b < 0, c \geq 0$$

$$|a+b| > |c| \text{ 이므로, } -(a+b) > 0$$

$$\therefore a+b+c < 0$$

$$\begin{aligned} \therefore (\text{주어진 식}) &= |a+b+c| - |a+b| - |c| \\ &= -(a+b+c) + (a+b) - c \\ &= -2c \end{aligned}$$

9. $a_1, a_2, \dots, a_{10}$ 은 1 또는 -1 의 값을 갖고 $a_1 a_2 \dots a_{10} = 1$ 일 때, $\sqrt{a_1} \sqrt{a_2} \dots \sqrt{a_{10}}$ 의 값이 될 수 있는 수를 다음 <보기>에서 모두 고르면? (단, $i = \sqrt{-1}$)

보기

㉠ 1

㉡ -1

㉢ i

㉣ $-i$

① ㉠

② ㉠, ㉡

③ ㉡, ㉣

④ ㉠, ㉡, ㉣

⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉣

해설

$a_1 a_2 \dots a_{10} = 1$ 이면 $a_1, a_2, \dots, a_{10}$ 중에서 -1 이 되는 수는 짝수(0 포함) 개 있다.

i) -1 이 $4k + 2$ ($k = 0, 1, 2$) 개 있을 때

$$\begin{aligned} & \sqrt{a_1} \sqrt{a_2} \dots \sqrt{a_{10}} \\ &= \sqrt{a_1 a_2 \dots a_{10}} i^{4k+2} = \sqrt{1} \cdot i^2 = -1 \end{aligned}$$

ii) -1 이 $4k$ ($k = 0, 1, 2$) 개 있을 때

$$\begin{aligned} & \sqrt{a_1} \sqrt{a_2} \dots \sqrt{a_{10}} \\ &= \sqrt{a_1 a_2 \dots a_{10}} i^{4k} \\ &= 1 \end{aligned}$$

i), ii) 에서 ㉠, ㉡ 만이 옳다.

10. $\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}i}{2}$ 에 대하여 $z = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1}$ 이라 할 때, $7z\bar{z}$ 의 값을 구하시오.

(단, $\bar{z}$ 는 z 의 켈레복소수이고 $i = \sqrt{-1}$ 이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

두 복소수 x, y 에 대하여 $\overline{\left(\frac{y}{x}\right)} = \frac{\bar{y}}{\bar{x}}$ 이다.

$z = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1}$ 에서 $\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}i}{2}$ 이므로

직접 α 를 대입하여 z 를 구하고 $\bar{z}$ 를 구해서 풀 수도 있지만 그렇게 하면 계산이 너무 어려워진다.

따라서 복소수의 켈레복소수의 성질을 이용하여 풀도록 시도해 보자.

주어진 문제에서 $\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}i}{2}$

이므로 $\bar{\alpha} = \frac{1 - \sqrt{5}i}{2}$ 이다.

따라서, $\alpha + \bar{\alpha} = 1$, $\alpha\bar{\alpha} = \frac{3}{2}$ 이고

$z = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1}$, $\bar{z} = \frac{\bar{\alpha} - 1}{\bar{\alpha} + 1}$ 이므로

$$\begin{aligned} z\bar{z} &= \frac{(\alpha - 1)(\bar{\alpha} - 1)}{(\alpha + 1)(\bar{\alpha} + 1)} \\ &= \frac{\alpha\bar{\alpha} - (\alpha + \bar{\alpha}) + 1}{\alpha\bar{\alpha} + (\alpha + \bar{\alpha}) + 1} \\ &= \frac{\frac{3}{2} - 1 + 1}{\frac{3}{2} + 1 + 1} \\ &= \frac{\frac{2}{2}}{\frac{7}{2}} \end{aligned}$$

$$\therefore 7z\bar{z} = 7 \times \frac{2}{7} = 2$$

11. $(z - \bar{z}) \times i$ 가 음수이고 $\frac{z}{1+z^2}$ 와 $\frac{z^2}{1+z}$ 이 모두 실수일 때, z^2 의 값은?
(단, $\bar{z}$ 는 z 의 켈레복소수)

- ① $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ② $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ③ $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$
 ④ $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ⑤ $1 + i$

해설

$$z = a + bi, \bar{z} = a - bi$$

$$(z - \bar{z}) \times i < 0 \text{ 에서 } -2b < 0 \therefore b > 0$$

$$\frac{z}{1+z^2} \text{ 가 실수이므로}$$

$$\frac{z}{1+z^2} = \overline{\left(\frac{z}{1+z^2}\right)} = \frac{\bar{z}}{1+\bar{z}^2}$$

$$\therefore z(1+\bar{z}^2) = \bar{z}(1+z^2) \Leftrightarrow (z\bar{z}-1)(z-\bar{z}) = 0$$

$$\therefore z\bar{z} = 1 \quad (\because z - \bar{z} \neq 0)$$

$$a^2 + b^2 = 1 \dots \textcircled{\ominus}$$

$$\text{한편, } \frac{z^2}{1+z} \text{ 이 실수이므로}$$

$$\frac{z^2}{1+z} = \overline{\left(\frac{z^2}{1+z}\right)} = \frac{\bar{z}^2}{1+\bar{z}}$$

$$\Leftrightarrow z^2(1+\bar{z}) = \bar{z}^2(1+z)$$

$$\Leftrightarrow (z - \bar{z})(z + \bar{z} + z\bar{z}) = 0$$

$$\therefore z + \bar{z} = -z\bar{z} = -1 \quad (\because z - \bar{z} \neq 0)$$

$$2a = -1 \dots \textcircled{\omin�}$$

$$\textcircled{\ominus}, \textcircled{\omin�} \text{ 에서 } a = -\frac{1}{2}, b = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (\because b > 0)$$

$$\therefore z^2 = \left(\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}\right)^2 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$$

12. 복소수 α, β 는 $\alpha\bar{\alpha} = 1, \beta\bar{\beta} = 1$ 을 만족하고 $\alpha + \beta = i$ 이다. 이 때, $\alpha^2 + \beta^2$ 의 값을 구하면?

① 4

② 3

③ 2

④ 1

⑤ $\frac{1}{2}$

해설

$$\alpha + \beta = i \text{에서 } \overline{\alpha + \beta} = \bar{i} \quad \therefore \bar{\alpha} + \bar{\beta} = -i$$

$$\alpha\bar{\alpha} = 1, \beta\bar{\beta} = 1 \text{에서 } \bar{\alpha} = \frac{1}{\alpha}, \bar{\beta} = \frac{1}{\beta}$$

$$\bar{\alpha} + \bar{\beta} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} \quad \therefore \alpha\beta = -1$$

$$\therefore \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = i^2 - 2 \cdot (-1) = 1$$