1. 다음 식을 인수분해 하면 $(x+py)(x+qy+r)^2$ 이다. 이 때, $p^2+q^2+r^2$ 의 값을 구하여라.

$[x^3-y^3+x^2y-xy^2+2x^2-2y^2+x-y]$

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$$x^3-y^3+x^2y-xy^2+2x^2-2y^2+x-y$$
$$=(x-y)(x^2+xy+y^2)+xy(x-y)+2(x+y)(x-y)+(x-y)$$
$$=(x-y)\{(x+y)^2+2(x+y)+1\}$$
$$=(x-y)(x+y+1)^2$$
$$p=-1, q=1, r=1$$
$$\therefore\ p^2+q^2+r^2=3$$

2. $x^4+3x^2+4=(x^2+x+2)(x^2+ax+b)$ 일 때, 상수 a, b 의 곱을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$$\begin{aligned}(\text{좌 변}) &= (x^2+2)^2-x^2 \\ &= (x^2+x+2)(x^2-x+2)\end{aligned}$$

$\therefore\ a=-1,\ b=2$

$\therefore ab=-1\times 2=-2$

3. $x = 1001$ 일 때, $\dfrac{x^6 - x^4 + x^2 - 1}{x^5 + x^4 + x + 1}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1000

해설

$$\begin{aligned}\frac{x^6 - x^4 + x^2 - 1}{x^5 + x^4 + x + 1} &= \frac{(x^4+1)(x^2-1)}{(x^4+1)(x+1)} \\ &= x - 1 \\ &= 1001 - 1 \\ &= 1000\end{aligned}$$

4. 두 다항식 x^3+2x^2-x-2,
$(x-1)(3x^2+ax+2a)$ 의 최대공약수가 이차식이 되도록 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a=-3$

해설

$x^3+2x^2-x-2=(x-1)(x+2)(x+1)$

$\therefore 3x^2+ax+2a$는

$x+2$ 또는 $x+1$을 인수로 가져야 한다.

$f(x)=3x^2+ax+2a$로 놓을 때

$x+2$가 인수이면 $f(-2)=12-2a+2a=12$가 되어 적합하지 않다.

$\therefore x+1$를 인수로 갖는다.

$x+1$이 인수이면 $f(-1)=3-a+2a=3+a=0$

$\therefore a=-3$

5. 이차항의 계수가 1인 두 이차다항식 A, B의 최대공약수가 $x+2$이고 최소공배수가 x^3+x^2-4x-4이다. $A+B=ax^2+bx+c$를 만족하는 상수 $a+b+c$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$x^3+x^2-4x-4=(x+2)(x+1)(x-2)$

두 다항식은 각각 $(x+2)(x+1), (x+2)(x-2)$

$A+B=(x+2)(x-2)+(x+2)(x+1)$

$=2x^2+3x-2=ax^2+bx+c$

$\therefore a=2, b=3, c=-2$

$\therefore\ a+b+c=3$

6. 차수가 같은 두 다항식의 합이 $2x^2-8$이고, 최소공배수가 x^3-2x^2-5x+6일 때, 두 다항식의 최대공약수는 $ax+b$이다. 이 때, $a+b$의 값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 3

해설

두 식 A, B의 최대공약수를 G라 하면

$A=Ga, B=Gb(a, b$는 서로소$)$

$A+B=(a+b)G=2(x+2)(x-2)$

$L=abG=(x-1)(x-3)(x+2)$

$\therefore\ G=x+2$

7. $2x^2+xy-3y^2+5x+5y+2$를 인수분해 하면$(x+ay+b)(2x+cy+d)$이다. 이 때, $a+b+c+d$의 값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 5

해설

$$2x^2+xy-3y^2+5x+5y+2$$
$$=2x^2+(y+5)x-3y^2+5y+2$$
$$=2x^2+(y+5)x-(y-2)(3y+1)$$
$$=\{x-(y-2)\}\{2x+(3y+1)\}$$
$$=(x-y+2)(2x+3y+1)$$
$$\therefore\ a=-1, b=2, c=3, d=1$$

8. 0이 아닌 세 수가 있다. 이들의 합은 0, 역수의 합은 $\frac{3}{2}$, 제곱의 합은 1일 때, 이들 세 수의 세제곱의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

세 수를 x, y, z라 하면 주어진 조건으로부터

$x+y+z=0 \cdots\cdots$ ㉠

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{3}{2} \cdots\cdots$ ㉡

$x^2+y^2+z^2=1 \cdots\cdots$ ㉢

$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$ 이므로

㉠, ㉢에서 $0^2=1+2(xy+yz+zx)$

$\therefore\ xy+yz+zx=-\frac{1}{2} \cdots\cdots$ ㉣

㉡에서 $\frac{xy+yz+zx}{xyz}=\frac{3}{2}$ 이므로

$3xyz=2(xy+yz+zx)$

$\therefore\ xyz=-\frac{1}{3}$

또, $x^3+y^3+z^3-3xyz$

$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$

㉠에서 $x+y+z=0$ 이므로

$x^3+y^3+z^3=3xyz=3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)=-1$

9. $a+b+c=0$ 일 때, $\dfrac{a^2+1}{bc}+\dfrac{b^2+1}{ac}+\dfrac{c^2+1}{ab}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$$(\text{준식}) = \frac{a(a^2+1)+b(b^2+1)+c(c^2+1)}{abc}$$

$$= \frac{a^3+b^3+c^3+a+b+c}{abc}$$

그런데, $a^3+b^3+c^3=3abc$ 이므로

$$\therefore \frac{a^3+b^3+c^3+a+b+c}{abc} = \frac{3abc}{abc} = 3$$

10. $a+b+c=0,\ abc \neq 0$ 일 때, $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{a^3+b^3+c^3}+\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$$a^3+b^3+c^3-3abc$$
$$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$
$$=0(\because\ a+b+c=0\ )$$
$$\therefore\ a^3+b^3+c^3=3abc$$
$$\therefore(\text{준식})=\frac{a^2+b^2+c^2}{3abc}+\frac{2}{3}\left(\frac{bc+ca+ab}{abc}\right)$$
$$=\frac{(a+b+c)^2}{3abc}=0$$

11. 세 양수 $a,\ b,\ c$가 $a^3+b^3+c^3=3abc$를 만족시킬 때 $a,\ b,\ c$를 세 변으로 하는 삼각형의 넓이는 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$이라고 한다. 이 때, $a+b+c$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$a^3+b^3+c^3-3abc$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=0$에서

$a>0,\ b>0,\ c>0$이므로 $a+b+c\neq 0$

$\therefore a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$

$\therefore\ \dfrac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=0$

$\therefore\ a=b=c\ (\because a,\ b,\ c$는 실수$)$

따라서 $a,\ b,\ c$를 세 변으로 하는 삼각형은 정삼각형이고 그

넓이가 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$이므로 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$,

$a^2=1$

$\therefore\ a=b=c=1$

$\therefore\ a+b+c=3$

12. $\dfrac{2^{40}-2^{35}-2^{5}+1}{2^{35}-1}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 31

해설

$2^5 = x$라 두면

$$\frac{2^{40}-2^{35}-2^{5}+1}{2^{35}-1} = \frac{x^8-x^7-x+1}{x^7-1}$$
$$= \frac{(x-1)(x^7-1)}{x^7-1}$$
$$= x-1 = 2^5-1 = 31$$

13. $x^4+2x^2+9=(x^2+ax+b)(x^2+cx+d)$로 인수분해될 때, $|ab-cd|$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= (x^2+3)^2-(2x)^2\\ &= (x^2+2x+3)(x^2-2x+3)\end{aligned}$$

여기서 계수를 비교하면

$a=2,\ b=3,\ c=-2,\ d=3$

$\therefore |ab-cd| = |2\times 3-(-2)\times 3| = 12$

14. $a(a+1)=1$ 일 때, $\dfrac{a^6-1}{a^4-a^2}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$$\frac{a^6-1}{a^4-a^2}=\frac{(a^3+1)(a^3-1)}{a^2(a^2-1)}$$

$$=\frac{(a+1)(a^2-a+1)(a-1)(a^2+a+1)}{a^2(a+1)(a-1)}$$

$$=\frac{(a^2-a+1)(a^2+a+1)}{a^2} \leftarrow a^2=1-a \text{대입}$$

$$=\frac{2(1-a)\times 2}{1-a}=4$$

15. 세 다항식 $f(x)=x^2+x-2$, $g(x)=2x^2+3x-2$, $h(x)=x^2+mx+8$ 의 최대공약수가 x의 일차식일 때, m의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $m=6$

해설

$f(x)=(x+2)(x-1)$

$g(x)=(x+2)(2x-1)$ 이므로

$f(x)$와 $g(x)$의 최대공약수는 $x+2$

이것이 $h(x)$의 약수이어야 하므로

$h(-2)=4-2m+8=0$

$\therefore\ m=6$

16. 두 다항식 $x^2 - 3x + a$와 $x^2 + bx - 6$의 최대공약수가 $x - 1$일 때, 두 다항식의 최소공배수를 $f(x)$라 하자. 이 때, $f(x)$를 $x - 2$로 나눈 나머지를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$x^2 - 3x + a, x^2 + bx - 6$은

$(x - 1)$을 인수로 가지므로 $a = 2, b = 5$

$\therefore\ x^2 - 3x + 2 = (x - 2)(x - 1)$

$x^2 + 5x - 6 = (x + 6)(x - 1)$

$f(x) = (x - 1)(x - 2)(x + 6)$

$f(x)$를 $x - 2$로 나눈 나머지 $f(2) = 0$

17. x^2+ax-9와 x^2+bx+c의 합은 $2x^2-4x-6$, 최소공배수는 x^3-x^2-9x+9이다. $a-b+c$의 값을 구하여라. (단, a, b, c는 상수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$A=x^2+ax-9=Gp$

$B=x^2+bx+c=Gq$라 하면

$A+B=(p+q)G=2x^2-4x-6=2(x+1)(x-3)$

$L=pqG=x^3-x^2-9x+9=x^2(x-1)-9(x-1)$

$=(x-1)(x^2-9)=(x-1)(x+3)(x-3)$

따라서, $G=x-3,\ p=x+3,\ q=x-1$이다.

$\therefore\ A=(x+3)(x-3)=x^2-9$

$\quad B=(x-1)(x-3)=x^2-4x+3$

$\therefore\ a=0,\ b=-4,\ c=3$

$\therefore\ a-b+c=7$