

1. x 에 관한 이차방정식 $x^2 + nx + p = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하고, $x^2 + nx + q = 0$ 의 두 근을 γ, δ 라 할 때, $(\alpha - \gamma)(\alpha - \delta)(\beta - \gamma)(\beta - \delta)$ 를 p, q 로 나타내면?

① $(p + q)^2$

② $(2p + q)^2$

③ $(p - 2q)^2$

④ $(p - q)^2$

⑤ $(2p - 3q)^2$

해설

근과 계수와의 관계에서

$$\alpha + \beta = -n, \alpha\beta = p, \gamma + \delta = -n, \gamma\delta = q \text{ 이므로}$$

$$\text{주어진 식} = \{(\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)\} \{(\alpha - \delta)(\beta - \delta)\}$$

$$= \{\gamma^2 - (\alpha + \beta)\gamma + \alpha\beta\} \{\delta^2 - (\alpha + \beta)\delta + \alpha\beta\}$$

$$= (\gamma^2 + n\gamma + p)(\delta^2 + n\delta + p)$$

$$\text{그런데, } \gamma^2 + n\gamma + q = 0 \text{ 에서}$$

$$\gamma^2 + n\gamma + p = p - q$$

$$\text{또, } \delta^2 + n\delta + q = 0 \text{ 에서}$$

$$\delta^2 + n\delta + p = p - q$$

$$\text{따라서, 주어진 식} = (p - q)^2$$

2. $x^2 - 3x + 1 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하고, $g(x) = x^3 - x^2 - 3x + 3$ 라 할 때, $g(\alpha) \cdot g(\beta)$ 의 값은?

① 1

② 3

③ 8

④ 11

⑤ 13

해설

근과 계수와의 관계에서 $\alpha + \beta = 3$, $\alpha\beta = 1$

또, $g(x) = x^3 - x^2 - 3x + 3$

$= (x^2 - 3x + 1)(x + 2) + 2x + 1$

α, β 는 $x^2 - 3x + 1 = 0$ 의 근이므로

$g(\alpha) = 2\alpha + 1$, $g(\beta) = 2\beta + 1$

$\therefore g(\alpha)g(\beta) = (2\alpha + 1)(2\beta + 1)$

$= 4\alpha\beta + 2(\alpha + \beta) + 1$

$= 4 + 6 + 1 = 11$

3. $x^3 - 3x + 2 = 0$ 의 한 근이 a 이고, $x^2 - ax + 1 = 0$ 의 두 근이 b, c 일 때, $b^3 + c^3$ 의 값은?

① -1

② 1

③ -2

④ 27

⑤ 0

해설

a 는 $x^3 - 3x + 2 = 0$ 의 한 근이므로

$$a^3 - 3a + 2 = 0$$

b, c 는 $x^2 - ax + 1 = 0$ 의 두 근이므로

$$b + c = a, bc = 1$$

$$\begin{aligned}\therefore b^3 + c^3 &= (b + c)^3 - 3bc(b + c) \\ &= a^3 - 3a = -2\end{aligned}$$

4. 직선 $y = x + a$ 가 포물선 $y = ax^2 + (b+1)x - \frac{b}{2}$ 에 의해 잘려진 선분의 길이의 최솟값을 구하면?

- ① $\sqrt{5}$ ② $\sqrt{6}$ ③ $\sqrt{7}$ ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ $5\sqrt{3}$

해설

교점의 x 좌표를 구하는 식은

$$ax^2 + (b+1)x - \frac{b}{2} = x + a$$

$$ax^2 + bx - \frac{b}{2} - a = 0 \text{의 두 근을 } \alpha, \beta \text{라 하면}$$

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \alpha\beta = \frac{-\frac{b}{2} - a}{a}$$

교점은 $(\alpha, \alpha + a), (\beta, \beta + a)$

$\therefore$ 교점을 이은 선분의 길이를 l 이라 하면

$$l^2 = 2(\beta - \alpha)^2 = 2(\beta + \alpha)^2 - 8\alpha\beta$$

$$= 2\left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 8\left(\frac{-\frac{b}{2} - a}{a}\right)$$

$$= 2\left\{\left(\frac{b}{a}\right)^2 + 2\left(\frac{b}{a}\right) + 4\right\}$$

$$= 2\left\{\left(\frac{b}{a} + 1\right)^2 + 3\right\} \geq 6$$

$$\therefore l \geq \sqrt{6}$$

5. x 에 관한 이차방정식 $x^2 + (m+1)x + (m^2-1) = 0$ 이 실근 α, β 를 가질 때, $\alpha^2 + \beta^2$ 의 최솟값을 구하면? (단, m 은 실수이다.)

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$$D = (m+1)^2 - 4(m^2-1) \geq 0, \quad 3m^2 - 2m - 5 \leq 0, \quad (3m-5)(m+1) \leq 0$$

$$\therefore -1 \leq m \leq \frac{5}{3}$$

근과 계수와의 관계에서

$$\alpha + \beta = -(m+1), \quad \alpha\beta = m^2 - 1$$

$$\begin{aligned} \therefore \alpha^2 + \beta^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta \\ &= \{-(m+1)\}^2 - 2(m^2 - 1) \end{aligned}$$

$$= -m^2 + 2m + 3 = -(m-1)^2 + 4$$

따라서, 구하는 최솟값은 0 ($m = -1$ 일 때)

6. x 에 대한 이차방정식 $x^2 + 2mx + 2m^2 + m - 2 = 0$ 이 두 실근 α, β 를 가질 때, $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2$ 를 m 에 대한 식으로 나타내고, 이 식의 최댓값과 최솟값을 구하면?

① 최댓값: 8, 최솟값: 2

② 최댓값: 10, 최솟값: 3

③ 최댓값: 12, 최솟값: $\frac{15}{8}$

④ 최댓값: 11, 최솟값: $\frac{21}{8}$

⑤ 최댓값: 13, 최솟값: $\frac{7}{8}$

해설

주어진 방정식이 실근을 가지므로

$$D/4 = m^2 - (2m^2 + m - 2) \geq 0 \text{에서 } -2 \leq m \leq 1$$

$\alpha + \beta = -2m$, $\alpha\beta = 2m^2 + m - 2$ 이므로

$$\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - \alpha\beta$$

$$= (-2m)^2 - (2m^2 + m - 2)$$

$$= 2m^2 - m + 2$$

$$= 2 \left(m - \frac{1}{4} \right)^2 + \frac{15}{8} \quad (-2 \leq m \leq 1)$$

$$\therefore m = \frac{1}{4} \text{일 때, 최솟값 } \frac{15}{8}$$

$$m = -2 \text{일 때, 최댓값 } 12$$

7. 이차방정식 $x^2 + 3x + 1 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$ 의 값을 계산하면?

① $\sqrt{5}i$ ② $-\sqrt{5}i$ ③ $\sqrt{5}$ ④ $-\sqrt{5}$ ⑤ $\pm \sqrt{5}i$

해설

$\alpha + \beta = -3 < 0$, $\alpha\beta = 1 > 0$, $D = 9 - 4 > 0$ 이므로 두 근은 모두 음수이다.

$$\begin{aligned}(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2 &= (\sqrt{\alpha})^2 + (\sqrt{\beta})^2 + 2\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta} \\&= \alpha + \beta - 2\sqrt{\alpha\beta} \quad (\because \alpha < 0, \beta < 0 \text{ 이므로}) \\&= -3 - 2 = -5\end{aligned}$$

$$\therefore \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = \pm \sqrt{5}i$$

$$\begin{aligned}\text{한편, } \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} &= \sqrt{(-\alpha) \cdot (-1)} + \sqrt{(-\beta) \cdot (-1)} \\&= \sqrt{-\alpha} \cdot i + \sqrt{-\beta} \cdot i \\&= (\sqrt{-\alpha} + \sqrt{-\beta}) \cdot i\end{aligned}$$

$\therefore \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$ 는 (양수) $\times i$ 꼴이다.

$$\therefore \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = \sqrt{5}i$$

8. $x^2 - x + 1 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하면 $f(\alpha) = \beta + 1, f(\beta) = \alpha + 1$ 을 만족하는 이차항의 계수가 1인 이차의 다항식 $f(x)$ 에 대하여 $f(1)$ 의 값을 구하면?

- ① 1
- ② 2
- ③ 3
- ④ 4
- ⑤ 5

해설

$\alpha + \beta = 1, \alpha\beta = 1 (\alpha \neq \beta)$
 $f(x) = x^2 + ax + b$ 라 하면
 $f(\alpha) = \alpha^2 + a\alpha + b = \beta + 1$
 $f(\beta) = \beta^2 + a\beta + b = \alpha + 1$
 $f(\alpha) - f(\beta) = \alpha^2 - \beta^2 + a(\alpha - \beta) = -(\alpha - \beta)$
 $\alpha \neq \beta$ 이므로 양변을 $\alpha - \beta$ 로 나누면
 $\alpha + \beta + a = -1 \quad \therefore a = -2 (\because \alpha + \beta = 1)$
 $f(\alpha) = \alpha^2 - 2\alpha + b = \beta + 1$
 $f(\beta) = \beta^2 - 2\beta + b = \alpha + 1$
 $f(\alpha) + f(\beta) = \alpha^2 + \beta^2 - 2(\alpha + \beta) + 2b = \alpha + \beta + 2$
 $(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta - 2(\alpha + \beta) + 2b = \alpha + \beta + 2$
 $1 - 2 - 2 + 2b = 3 \quad \therefore b = 3$
 $\therefore f(x) = x^2 - 2x + 3$
 $f(1) = 2$

9. x 에 대한 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $\alpha+\beta, \alpha\beta$ 를 두 근으로 하는 이차방정식은 $ax^2-bx+c=0$ 이 된다. 이 때, $\alpha^3+\beta^3$ 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$ax^2+bx+c=0$ 두 근이 α, β 이므로,

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}, \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

$ax^2-bx+c=0$ 의 두 근이 $\alpha+\beta, \alpha\beta$ 이므로

$$\begin{cases} \text{두근의 합} : -\frac{b}{a}+\frac{c}{a}=\frac{-b+c}{a}=\frac{b}{a} \\ \text{두근의 곱} : -\frac{b}{a}\cdot\frac{c}{a}=\frac{c}{a} \end{cases}$$

$$2b=c, a=-b, c=-2a$$

$$\alpha+\beta=-\frac{(-a)}{a}=1, \alpha\beta=\frac{-2a}{a}=-2$$

$$\begin{aligned} \alpha^3+\beta^3 &= (\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta) \\ &= 1^3-3\cdot(-2)\cdot 1=1+6=7 \end{aligned}$$