1. x에 관한 이차방정식 $x^2+nx+p=0$의 두 근을 α, β라 하고, $x^2+nx+q=0$의 두 근을 γ, δ라 할 때, $(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)(\beta-\delta)$를 p, q로 나타내면?

① $(p+q)^2$ ② $(2p+q)^2$ ③ $(p-2q)^2$

④ $(p-q)^2$ ⑤ $(2p-3q)^2$

해설

근과 계수와의 관계에서

$\alpha+\beta=-n,\ \alpha\beta=p,\ \gamma+\delta=-n,\ \gamma\delta=q$이므로

주어진 식 $=\{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)\}\{(\alpha-\delta)(\beta-\delta)\}$

$=\{\gamma^2-(\alpha+\beta)\gamma+\alpha\beta\}\{\delta^2-(\alpha+\beta)\delta+\alpha\beta\}$

$=(\gamma^2+n\gamma+p)(\delta^2+n\delta+p)$

그런데, $\gamma^2+n\gamma+q=0$에서

$\gamma^2+n\gamma+p=p-q$

또, $\delta^2+n\delta+q=0$에서

$\delta^2+n\delta+p=p-q$

따라서, 주어진 식$=(p-q)^2$

2. $x^2-3x+1=0$의 두 근을 α, β라 하고, $g(x)=x^3-x^2-3x+3$라 할 때, $g(\alpha)\cdot g(\beta)$의 값은?

① 1 ② 3 ③ 8 ④ 11 ⑤ 13

해설

근과 계수와의 관계에서 $\alpha+\beta=3, \quad \alpha\beta=1$

또, $g(x)=x^3-x^2-3x+3$

$=(x^2-3x+1)(x+2)+2x+1$

α, β는 $x^2-3x+1=0$의 근이므로

$g(\alpha)=2\alpha+1, \ g(\beta)=2\beta+1$

$\therefore \ g(\alpha)g(\beta)=(2\alpha+1)(2\beta+1)$

$=4\alpha\beta+2(\alpha+\beta)+1$

$=4+6+1=11$

3. $x^3-3x+2=0$의 한 근이 a이고, $x^2-ax+1=0$의 두 근이 $b,\ c$일 때, b^3+c^3의 값은 ?

① -1 ② 1 ③ -2 ④ 27 ⑤ 0

해설

a는 $x^3-3x+2=0$의 한 근이므로

$a^3-3a+2=0$

$b,\ c$는 $x^2-ax+1=0$의 두 근이므로

$b+c=a,\ bc=1$

$$\therefore\ b^3+c^3=(b+c)^3-3bc(b+c)$$
$$=a^3-3a=-2$$

4. 직선 $y=x+a$가 포물선 $y=ax^2+(b+1)x-\dfrac{b}{2}$에 의해 잘려진 선분의 길이의 최솟값을 구하면?

① $\sqrt{5}$ ② $\sqrt{6}$ ③ $\sqrt{7}$ ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ $5\sqrt{3}$

해설

교점의 x좌표를 구하는 식은

$$ax^2+(b+1)x-\frac{b}{2}=x+a$$

$ax^2+bx-\dfrac{b}{2}-a=0$의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 하면

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\ \alpha\beta=\frac{-\frac{b}{2}-a}{a}$$

교점은 $(\alpha,\ \alpha+a),\ (\beta,\ \beta+a)$

$\therefore$교점을 이은 선분의 길이를 l이라 하면

$$l^2=2(\beta-\alpha)^2=2(\beta+\alpha)^2-8\alpha\beta$$

$$=2\left(-\frac{b}{a}\right)^2-8\left(\frac{-\frac{b}{2}-a}{a}\right)$$

$$=2\left\{\left(\frac{b}{a}\right)^2+2\left(\frac{b}{a}\right)+4\right\}$$

$$=2\left\{\left(\frac{b}{a}+1\right)^2+3\right\}\geq 6$$

$\therefore\ l\geq\sqrt{6}$

5. x에 관한 이차방정식 $x^2+(m+1)x+(m^2-1)=0$이 실근 α,β를 가질 때, $\alpha^2+\beta^2$의 최솟값을 구하면? (단, m은 실수이다.)

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$D=(m+1)^2-4(m^2-1)\geq 0,\ 3m^2-2m-5\leq 0,\ (3m-5)(m+1)\leq 0$

$\therefore\ -1\leq m\leq \dfrac{5}{3}$

근과 계수와의 관계에서

$\alpha+\beta=-(m+1),\ \alpha\beta=m^2-1$

$\therefore \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$=\{-(m+1)\}^2-2(m^2-1)$

$=-m^2+2m+3=-(m-1)^2+4$

따라서, 구하는 최솟값은 0 ($m=-1$일 때)

6. x에 대한 이차방정식 $x^2+2mx+2m^2+m-2=0$이 두 실근 α,β를 가질 때, $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2$를 m에 대한 식으로 나타내고, 이 식의 최댓값과 최솟값을 구하면?

① 최대값 : 8, 최소값 : 2
② 최대값 : 10, 최소값 : 3
③ 최대값 : 12, 최소값 : $\frac{15}{8}$
④ 최대값 : 11, 최소값 : $\frac{21}{8}$
⑤ 최대값 : 13, 최소값 : $\frac{7}{8}$

해설

주어진 방정식이 실근을 가지므로

$D/4=m^2-(2m^2+m-2)\geq 0$에서 $-2\leq m\leq 1$

$\alpha+\beta=-2m,\ \alpha\beta=2m^2+m-2$이므로

$\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta$

$=(-2m)^2-(2m^2+m-2)$

$=2m^2-m+2$

$=2\left(m-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{15}{8}(-2\leq m\leq 1)$

$\therefore m=\frac{1}{4}$일 때, 최솟값 $\frac{15}{8}$

$m=-2$일 때, 최댓값 12

7. 이차방정식 $x^2+3x+1=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$의 값을 계산하면?

① $\sqrt{5}i$ ② $-\sqrt{5}i$ ③ $\sqrt{5}$ ④ $-\sqrt{5}$ ⑤ $\pm\sqrt{5}i$

해설

$\alpha+\beta=-3<0$, $\alpha\beta=1>0$, $D=9-4>0$이므로 두 근은 모두 음수이다.

$(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2=(\sqrt{\alpha})^2+(\sqrt{\beta})^2+2\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}$

$=\alpha+\beta-2\sqrt{\alpha\beta}$ ($\because$ $\alpha<0$, $\beta<0$이므로)

$=-3-2=-5$

$\therefore$ $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=\pm\sqrt{5}i$

한편, $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=\sqrt{(-\alpha)\cdot(-1)}+\sqrt{(-\beta)\cdot(-1)}$

$=\sqrt{-\alpha}\cdot i+\sqrt{-\beta}\cdot i$

$=(\sqrt{-\alpha}+\sqrt{-\beta})\cdot i$

$\therefore$ $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$ 는 (양수)$\times i$ 꼴이다.

$\therefore$ $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=\sqrt{5}i$

8. $x^2-x+1=0$ 의 두 근을 α,β라 하면 $f(\alpha)=\beta+1$, $f(\beta)=\alpha+1$을 만족하는 이차항의 계수가 1인 이차의 다항식 $f(x)$에 대하여 $f(1)$의 값을 구하면?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$\alpha+\beta=1$, $\alpha\beta=1$ $(\alpha\neq\beta)$

$f(x)=x^2+ax+b$ 라 하면

$f(\alpha)=\alpha^2+a\alpha+b=\beta+1$

$f(\beta)=\beta^2+a\beta+b=\alpha+1$

$f(\alpha)-f(\beta)=\alpha^2-\beta^2+a(\alpha-\beta)=-(\alpha-\beta)$

$\alpha\neq\beta$ 이므로 양변을 $\alpha-\beta$ 로 나누면

$\alpha+\beta+a=-1$ $\quad\therefore a=-2$ $(\because \alpha+\beta=1)$

$f(\alpha)=\alpha^2-2\alpha+b=\beta+1$

$f(\beta)=\beta^2-2\beta+b=\alpha+1$

$f(\alpha)+f(\beta)=\alpha^2+\beta^2-2(\alpha+\beta)+2b=\alpha+\beta+2$

$(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta-2(\alpha+\beta)+2b=\alpha+\beta+2$

$1-2-2+2b=3$ $\quad\therefore b=3$

$\therefore f(x)=x^2-2x+3$

$f(1)=2$

9. x에 대한 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\alpha+\beta, \alpha\beta$를 두 근으로 하는 이차방정식은 $ax^2-bx+c=0$이 된다. 이 때, $\alpha^3+\beta^3$ 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$ax^2+bx+c=0$ 두 근이 α, β이므로,

$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$, $\alpha\beta=\frac{c}{a}$

$ax^2-bx+c=0$의 두 근이 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$이므로

$$\begin{cases} 두근의\ 합 : -\frac{b}{a}+\frac{c}{a}=\frac{-b+c}{a}=\frac{b}{a} \\ 두근의\ 곱 : -\frac{b}{a}\cdot\frac{c}{a}=\frac{c}{a} \end{cases}$$

$2b=c$, $a=-b$, $c=-2a$

$\alpha+\beta=-\frac{(-a)}{a}=1$, $\alpha\beta=\frac{-2a}{a}=-2$

$$\begin{aligned} \alpha^3+\beta^3 &= (\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta) \\ &= 1^3-3\cdot(-2)\cdot 1=1+6=7 \end{aligned}$$