

1. 이차방정식 $3x^2 - 6x + k = 0$ 이 실근을 갖도록 실수 k 의 범위를 정하면?

① $k < 1$

② $k \leq 1$

③ $k < 3$

④ $k \leq 3$

⑤ $1 < k < 3$

해설

$$3x^2 + 6x + k = 0,$$

$$\frac{D}{4} = (-3)^2 - 3 \cdot k \geq 0$$

$$3k \leq 9 \quad \therefore k \leq 3$$

2. x 가 실수 일 때, 다음 중 $x + \frac{1}{x}$ 의 값이 될 수 없는 것은? (단, $x \neq 0$)

① -5

② -2

③ 1

④ 3

⑤ 5

해설

$x + \frac{1}{x} = t$ 라 하고,

양변에 x 를 곱하면

$$x^2 + 1 = tx$$

$x^2 - tx + 1 = 0$ 에서 x 는 실수이므로

$$D = t^2 - 4 \geq 0 \quad \therefore t^2 \geq 4, t \leq -2 \text{ 또는 } t \geq 2$$

3. x 에 대한 이차방정식 $x^2 + (a-1)x + \frac{1}{4}a^2 + a - 2 = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 가질 실수 a 의 조건을 구하면?

① $a > 1$ ② $a < \frac{3}{2}$ ③ $a < \frac{3}{4}$ ④ $a > \frac{3}{4}$ ⑤ $a < 2$

해설

판별식을 D 라고 하면,

$$D = (a-1)^2 - 4\left(\frac{1}{4}a^2 + a - 2\right) = -6a + 9$$

서로 다른 두 실근을 가지려면 $D > 0$ 이어야 하므로

$$-6a + 9 > 0 \text{에서 } a < \frac{3}{2}$$

4. 이차방정식 $|x^2 - 5| = 4x$ 의 모든 근의 합은?

① 5

② 0

③ 6

④ 10

⑤ 12

해설

i) $x^2 - 5 \geq 0 \Rightarrow x \leq -\sqrt{5}$ 또는 $x \geq \sqrt{5} \dots \textcircled{1}$

$$x^2 - 4x - 5 = 0$$

$$(x+1)(x-5) = 0$$

$$x = -1 \text{ 또는 } 5$$

$$\Rightarrow x = 5 \text{ } (\because \textcircled{1})$$

ii) $x^2 - 5 < 0 \Rightarrow -\sqrt{5} < x < \sqrt{5} \dots \textcircled{2}$

$$x^2 + 4x - 5 = 0$$

$$(x-1)(x+5) = 0$$

$$x = 1 \text{ 또는 } -5$$

$$\Rightarrow x = 1 \text{ } (\because \textcircled{2})$$

$$\therefore \text{근의 합} : 6$$

5. x 에 대한 이차방정식 $x^2 - 4x + 6 = 0$ 의 근을 구하면 $x = a \pm \sqrt{b}i$ 이다.
 $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$$x^2 - 4x + 6 = 0$$

근의 공식을 이용하면 $x = 2 \pm \sqrt{4 - 6} = 2 \pm \sqrt{2}i$

$$\therefore a = b = 2, \quad a + b = 4$$

6. 다음 이차방정식의 해를 바르게 짝지은 것은?

(1) $x(5x - 4) = 4(x - 1)$
(2) $x^2 - 3\sqrt{2}x + 6 = 0$

- ① (1) $\frac{4 \pm 2i}{5}$, (2) $\frac{3\sqrt{2} \pm \sqrt{6}i}{2}$ ② (1) $\frac{3 \pm 2i}{5}$, (2) $\frac{3\sqrt{2} \pm \sqrt{6}i}{2}$
③ (1) $\frac{4 \pm 2i}{5}$, (2) $\frac{3\sqrt{3} \pm \sqrt{6}i}{2}$ ④ (1) $\frac{1 \pm 2i}{5}$, (2) $\frac{2\sqrt{2} \pm \sqrt{6}i}{2}$
⑤ (1) $\frac{4 \pm 3i}{5}$, (2) $\frac{3\sqrt{2} \pm \sqrt{6}i}{2}$

해설

근의 공식을 이용하여 푼다.
(1) $x(5x - 4) = 4(x - 1)$
 $\therefore 5x^2 - 8x + 4 = 0$
 $\therefore x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 20}}{5} = \frac{4 \pm 2i}{5}$
(2) $x = \frac{3\sqrt{2} \pm \sqrt{18 - 24}}{2} = \frac{3\sqrt{2} \pm \sqrt{6}i}{2}$

7. x 에 관한 이차방정식 $x^2 + nx + p = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하고, $x^2 + nx + q = 0$ 의 두 근을 γ, δ 라 할 때, $(\alpha - \gamma)(\alpha - \delta)(\beta - \gamma)(\beta - \delta)$ 를 p, q 로 나타내면?

① $(p + q)^2$

② $(2p + q)^2$

③ $(p - 2q)^2$

④ $(p - q)^2$

⑤ $(2p - 3q)^2$

해설

근과 계수와의 관계에서

$\alpha + \beta = -n$, $\alpha\beta = p$, $\gamma + \delta = -n$, $\gamma\delta = q$ 이므로

주어진 식 = $\{(\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)\} \{(\alpha - \delta)(\beta - \delta)\}$

= $\{\gamma^2 - (\alpha + \beta)\gamma + \alpha\beta\} \{\delta^2 - (\alpha + \beta)\delta + \alpha\beta\}$

= $(\gamma^2 + n\gamma + p)(\delta^2 + n\delta + p)$

그런데, $\gamma^2 + n\gamma + q = 0$ 에서

$\gamma^2 + n\gamma + p = p - q$

또, $\delta^2 + n\delta + q = 0$ 에서

$\delta^2 + n\delta + p = p - q$

따라서, 주어진 식 = $(p - q)^2$

8. $x^2 + (p-3)x + 1 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $(1+p\alpha+\alpha^2)(1+p\beta+\beta^2)$ 의 값을 구하면?

① 7

② 8

③ 9

④ 10

⑤ 13

해설

α, β 가 $x^2 + (p-3)x + 1 = 0$ 의 두 근이므로

$$\alpha^2 + (p-3)\alpha + 1 = 0 \dots\dots ①$$

$$\beta^2 + (p-3)\beta + 1 = 0 \dots\dots ②$$

$$①\text{에서 } 1 + p\alpha + \alpha^2 = 3\alpha$$

$$②\text{에서 } 1 + p\beta + \beta^2 = 3\beta$$

$$\therefore (1 + p\alpha + \alpha^2)(1 + p\beta + \beta^2)$$

$$= 3\alpha \cdot 3\beta$$

$$= 9\alpha\beta$$

$$= 9 (\because \alpha\beta = 1)$$

9. x 에 대한 이차방정식 $x^2 - (a-2)x + a^2 + a + 2 = 0$ 의 두 실근을 α, β 라 한다. 이 때, $(\alpha+1)(\beta+1)$ 의 최댓값을 구하면?

① 3

② 2

③ 1

④ 0

⑤ -1

해설

α, β 는 실수이므로

$$D = (a-2)^2 - 4(a^2 + a + 2) \geq 0$$

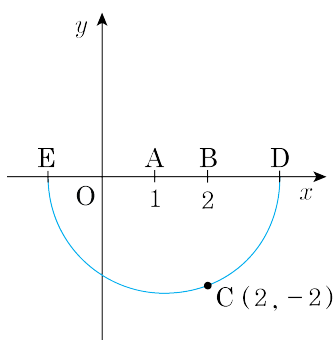
$$\therefore -2 \leq a \leq -\frac{2}{3}$$

$$\alpha + \beta = a - 2, \alpha\beta = a^2 + a + 2$$

$$\begin{aligned}(\alpha+1)(\beta+1) &= \alpha\beta + \alpha + \beta + 1 \\ &= a^2 + a + 2 + a - 2 + 1 \\ &= (a+1)^2\end{aligned}$$

$$\therefore a = -2 \text{ 일 때 최댓값 } (-2+1)^2 = 1$$

10. 다음의 그림에서 점 C, D, E는 점 A를 중심으로 하는 반원 위에 있다. 계수가 유리수인 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ ($a < 0$)의 그래프가 점 E를 지날 때, 반드시 지나는 또 다른 점을 구하면?



- ① A ② B ③ C
 ④ D ⑤ O

해설

$\overline{AC} = \sqrt{(2-1)^2 + (-2-0)^2} = \sqrt{5}$ 이므로
 $\overline{AD} = \overline{AE} = \sqrt{5}$ 이다.
 $\therefore$ 점 D의 좌표는 $(1 + \sqrt{5}, 0)$,
 점 E의 좌표는 $(1 - \sqrt{5}, 0)$ 이다.
 그런데, 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ ($a < 0$)의 그래프가 점 E를 지나므로
 $x = 1 - \sqrt{5}$ 는 방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 의 근이다.
 여기서, a, b, c 가 유리수이므로 $x = 1 + \sqrt{5}$
 ($\therefore$ 켈레근) 또한 방정식의 근이 된다.
 따라서, 그래프는 점 $D(1 + \sqrt{5}, 0)$ 을 지난다.

11. 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 의 한 근이 $3 + \sqrt{2}$ 일 때, 유리수 a, b 의 합 $a + b$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

한근이 $3 + \sqrt{2}$ 이므로 켄레근인 $3 - \sqrt{2}$ 도 근이 된다.

이차방정식의 두 근의 합이 $-a$ 이므로,

$$-a = (3 + \sqrt{2}) + (3 - \sqrt{2}) = 6 \quad \therefore a = -6$$

두근의 곱이 b 이므로

$$b = (3 + \sqrt{2}) \cdot (3 - \sqrt{2}) = 9 - 2 = 7 \quad \therefore b = 7$$

$$\therefore a + b = -6 + 7 = 1$$

12. 실계수의 이차방정식 $x^2 + bx + c = 0$ 이 허근 α, β 를 갖고, 두 허근 사이에 $\alpha^2 + 2\beta = 1$ 인 관계가 성립한다고 한다. 이 때, $b+c$ 의 값은?

① -1 ② 1 ③ 3 ④ 5 ⑤ 7

해설

계수가 실수이므로
 $\alpha = p + qi$ 이면 $\beta = p - qi$ ($q \neq 0$)
 $\alpha^2 + 2\beta = 1$ 이므로
 $(p + qi)^2 + 2(p - qi) = 1$ 에서
 $(p^2 - q^2 + 2p - 1) + 2q(p - 1)i = 0$
 $\therefore p^2 - q^2 + 2p - 1 = 0, 2q(p - 1) = 0$
 $q \neq 0$ 이므로
 $p = 1, q^2 = 2$
 $\therefore \alpha + \beta = 2p = 2, \alpha\beta = p^2 + q^2 = 3$
 $\therefore x^2 - 2x + 3 = 0$
 $\therefore b = -2, c = 3$
 $\therefore b + c = 1$

13. x 의 방정식 $x^4 - 2(3k + 1)x^2 + 7k^2 + 3k = 0$ 이 서로 다른 네 개의 실근을 갖기 위한 실수 k 의 값의 범위를 구하면?

① $k > 0$

② $k < 0$

③ $k > 1$

④ $k < 1$

⑤ $0 < k < 1$

해설

$x^2 = X$ 로 놓으면

$$X^2 - 2(3k + 1)X + 7k^2 + 3k = 0$$

이것이 서로 다른 양의 실근을 가지면 되므로

$$\frac{D}{4} = (3k + 1)^2 - (7k^2 + 3k) > 0,$$

$$\alpha + \beta = 2(3k + 1) > 0, \quad \alpha\beta = 7k^2 + 3k > 0$$

$$\therefore k > 0$$

14. 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 에서 $a < 0$, $b > 0$, $c < 0$, $b^2 - 4ac > 0$ 일 때, 다음 중 옳은 것은?

- ① 두 근은 모두 양이고 서로 다르다.
- ② 두 근은 모두 음이고 서로 다르다.
- ③ 양근 하나, 음근 하나를 가진다.
- ④ 양근, 음근, 0 을 가리지 않고 가질 수 있다.
- ⑤ 두 근은 서로 다른 부호이고, 양근이 음근의 절대값보다 크다.

해설

$b^2 - 4ac > 0$ 이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.
두 실근을 α, β 라 하면
 $a < 0$, $b > 0$, $c < 0$ 이므로
 $\alpha + \beta = -\frac{b}{a} > 0$
 $\alpha\beta = \frac{c}{a} > 0$
 $\therefore \alpha > 0, \beta > 0$

15. x 에 관한 이차방정식 $x^2 - 2kx + k^2 - 4k - 5 = 0$ 이 서로 다른 두 음의 실근을 가질 때, 상수 k 의 값의 범위는 $a < k < b$ 이다. 이 때, $a + b$ 의 값은?

- ① $-\frac{3}{4}$ ② $-\frac{5}{4}$ ③ $-\frac{7}{4}$ ④ $-\frac{9}{4}$ ⑤ $-\frac{11}{4}$

해설

$x^2 - 2kx + k^2 - 4k - 5 = 0$ 이 서로 다른 실근을 가져야 하므로

$$\frac{D}{4} = k^2 - (k^2 - 4k - 5) = k^2 - k^2 + 4k + 5 > 0$$

$$\therefore k > -\frac{5}{4} \dots \textcircled{1}$$

두 근이 음수이므로

$$\text{두 근의 합 } 2k < 0 \quad \therefore k < 0 \dots \textcircled{2}$$

두 근의 곱은

$$k^2 - 4k - 5 > 0 \text{에서 } (k+1)(k-5) > 0$$

$$\therefore k < -1, k > 5 \dots \textcircled{3}$$

$\therefore \textcircled{1}, \textcircled{2}, \textcircled{3}$ 에 의해

$$-\frac{5}{4} < k < -1$$

$$\therefore a = -\frac{5}{4}, b = -1$$

$$a + b = -\frac{5}{4} - 1 = -\frac{9}{4}$$