

1. x 에 관한 이차방정식 $x^2 + nx + p = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하고, $x^2 + nx + q = 0$ 의 두 근을 γ, δ 라 할 때, $(\alpha - \gamma)(\alpha - \delta)(\beta - \gamma)(\beta - \delta)$ 를 p, q 로 나타내면?

- ① $(p + q)^2$ ② $(2p + q)^2$ ③ $(p - 2q)^2$
④ $(p - q)^2$ ⑤ $(2p - 3q)^2$

해설

근과 계수와의 관계에서
 $\alpha + \beta = -n$, $\alpha\beta = p$, $\gamma + \delta = -n$, $\gamma\delta = q$ 이므로
주어진 식 = $\{(\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)\} \{(\alpha - \delta)(\beta - \delta)\}$
= $\{\gamma^2 - (\alpha + \beta)\gamma + \alpha\beta\} \{\delta^2 - (\alpha + \beta)\delta + \alpha\beta\}$
= $(\gamma^2 + n\gamma + p)(\delta^2 + n\delta + p)$
그런데, $\gamma^2 + n\gamma + q = 0$ 에서
 $\gamma^2 + n\gamma + p = p - q$
또, $\delta^2 + n\delta + q = 0$ 에서
 $\delta^2 + n\delta + p = p - q$
따라서, 주어진 식 = $(p - q)^2$

2. 직선 $y = x + a$ 가 포물선 $y = ax^2 + (b + 1)x - \frac{b}{2}$ 에 의해 잘려진 선분의 길이의 최솟값을 구하면?

- ① $\sqrt{5}$ ② $\sqrt{6}$ ③ $\sqrt{7}$ ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ $5\sqrt{3}$

해설

교점의 x 좌표를 구하는 식은

$$ax^2 + (b + 1)x - \frac{b}{2} = x + a$$

$$ax^2 + bx - \frac{b}{2} - a = 0 \text{의 두 근을 } \alpha, \beta \text{라 하면}$$

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \alpha\beta = \frac{-\frac{b}{2} - a}{a}$$

교점은 $(\alpha, \alpha + a), (\beta, \beta + a)$

$\therefore$ 교점을 이은 선분의 길이를 l 이라 하면

$$l^2 = 2(\beta - \alpha)^2 = 2(\beta + \alpha)^2 - 8\alpha\beta$$

$$= 2\left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 8\left(\frac{-\frac{b}{2} - a}{a}\right)$$

$$= 2\left\{\left(\frac{b}{a}\right)^2 + 2\left(\frac{b}{a}\right) + 4\right\}$$

$$= 2\left\{\left(\frac{b}{a} + 1\right)^2 + 3\right\} \geq 6$$

$$\therefore l \geq \sqrt{6}$$

3. 이차방정식 $x^2 + 3x + 1 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$ 의 값을 계산하면?

- ① $\sqrt{5}i$ ② $-\sqrt{5}i$ ③ $\sqrt{5}$ ④ $-\sqrt{5}$ ⑤ $\pm \sqrt{5}i$

해설

$\alpha + \beta = -3 < 0$, $\alpha\beta = 1 > 0$, $D = 9 - 4 > 0$ 이므로 두 근은 모두 음수이다.

$$(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2 = (\sqrt{\alpha})^2 + (\sqrt{\beta})^2 + 2\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta}$$

$$= \alpha + \beta - 2\sqrt{\alpha\beta} \quad (\because \alpha < 0, \beta < 0 \text{ 이므로})$$

$$= -3 - 2 = -5$$

$$\therefore \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = \pm \sqrt{5}i$$

$$\text{한편, } \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = \sqrt{(-\alpha) \cdot (-1)} + \sqrt{(-\beta) \cdot (-1)}$$

$$= \sqrt{-\alpha} \cdot i + \sqrt{-\beta} \cdot i$$

$$= (\sqrt{-\alpha} + \sqrt{-\beta}) \cdot i$$

$$\therefore \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} \text{ 는 (양수)} \times i \text{ 꼴이다.}$$

$$\therefore \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = \sqrt{5}i$$