1. x에 관한 이차방정식 $x^2+nx+p=0$의 두 근을 α, β라 하고, $x^2+nx+q=0$의 두 근을 γ, δ라 할 때, $(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)(\beta-\delta)$를 p, q로 나타내면?

① $(p+q)^2$ ② $(2p+q)^2$ ③ $(p-2q)^2$

④ $(p-q)^2$ ⑤ $(2p-3q)^2$

해설

근과 계수와의 관계에서

$\alpha+\beta=-n,\ \alpha\beta=p,\ \gamma+\delta=-n,\ \gamma\delta=q$이므로

주어진 식 $=\{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)\}\{(\alpha-\delta)(\beta-\delta)\}$

$=\{\gamma^2-(\alpha+\beta)\gamma+\alpha\beta\}\{\delta^2-(\alpha+\beta)\delta+\alpha\beta\}$

$=(\gamma^2+n\gamma+p)(\delta^2+n\delta+p)$

그런데, $\gamma^2+n\gamma+q=0$에서

$\gamma^2+n\gamma+p=p-q$

또, $\delta^2+n\delta+q=0$에서

$\delta^2+n\delta+p=p-q$

따라서, 주어진 식$=(p-q)^2$

2. 직선 $y=x+a$가 포물선 $y=ax^2+(b+1)x-\dfrac{b}{2}$에 의해 잘려진 선분의 길이의 최솟값을 구하면?

① $\sqrt{5}$ ② $\sqrt{6}$ ③ $\sqrt{7}$ ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ $5\sqrt{3}$

해설

교점의 x좌표를 구하는 식은

$ax^2+(b+1)x-\dfrac{b}{2}=x+a$

$ax^2+bx-\dfrac{b}{2}-a=0$의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 하면

$\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a},\ \alpha\beta=\dfrac{-\dfrac{b}{2}-a}{a}$

교점은 $(\alpha,\ \alpha+a),\ (\beta,\ \beta+a)$

$\therefore$교점을 이은 선분의 길이를 l이라 하면

$l^2=2(\beta-\alpha)^2=2(\beta+\alpha)^2-8\alpha\beta$

$=2\left(-\dfrac{b}{a}\right)^2-8\left(\dfrac{-\dfrac{b}{2}-a}{a}\right)$

$=2\left\{\left(\dfrac{b}{a}\right)^2+2\left(\dfrac{b}{a}\right)+4\right\}$

$=2\left\{\left(\dfrac{b}{a}+1\right)^2+3\right\}\geq 6$

$\therefore\ l\geq\sqrt{6}$

3. 이차방정식 $x^2+3x+1=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$의 값을 계산하면?

① $\sqrt{5}i$　② $-\sqrt{5}i$　③ $\sqrt{5}$　④ $-\sqrt{5}$　⑤ $\pm\sqrt{5}i$

해설

$\alpha+\beta=-3<0$, $\alpha\beta=1>0$, $D=9-4>0$이므로 두 근은 모두 음수이다.

$(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2=(\sqrt{\alpha})^2+(\sqrt{\beta})^2+2\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}$

$=\alpha+\beta-2\sqrt{\alpha\beta}$ ($\because$ $\alpha<0$, $\beta<0$이므로)

$=-3-2=-5$

$\therefore \sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=\pm\sqrt{5}i$

한편, $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=\sqrt{(-\alpha)\cdot(-1)}+\sqrt{(-\beta)\cdot(-1)}$

$=\sqrt{-\alpha}\cdot i+\sqrt{-\beta}\cdot i$

$=(\sqrt{-\alpha}+\sqrt{-\beta})\cdot i$

$\therefore \sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$는 (양수)$\times i$ 꼴이다.

$\therefore \sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=\sqrt{5}i$