1. 두 다항식 $f(x) = x^2 + 3x + a$, $g(x) = x^3 + ax$를 $x + 2$로 나눈 나머지가 같을 때, 상수 a의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = -2$

해설

$f(x) = x^2 + 3x + a$, $g(x) = x^3 + ax$에서
$f(-2) = g(-2)$이므로
$4 - 6 + a = -8 - 2a$
$\therefore\ a = -2$

2. 모든 실수 x에 대하여 $x^{10}+1=a_0+a_1(x-1)+a_2(x-1)^2+\cdots+a_{10}(x-1)^{10}$이 성립할 때, $a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{10}$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 513

해설

양변에 $x=0$을 대입하면
$1=a_0-a_1+a_2-\cdots+a_{10}\cdots$①
양변에 $x=2$을 대입하면
$2^{10}+1=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{10}\cdots$②
①+②에 의해
$2^{10}+2=2\left(a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{10}\right)$
$\therefore\left(a_0+a_2+\cdots+a_{10}\right)=2^9+1=513$

3. $\dfrac{2x+ay-b}{x-y-1}$가 $x-y-1 \neq 0$인 어떤 x, y의 값에 대하여도 항상 일정한 값을 가질 때, $a-b$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -4

해설

$\dfrac{2x+ay-b}{x-y-1}=k$라 놓으면

$2x+ay-b=k(x-y-1)$

x, y에 대하여 정리하면,

$(2-k)x+(a+k)y-b+k=0$

위의 식이 x, y에 대한 항등식이어야 하므로

$2-k=0,\ a+k=0,\ -b+k=0$

$\therefore\ k=2,\ a=-2,\ b=2$

$\therefore\ a-b=-4$

4. 다항식 $f(x)$를 $x-2$, $x+2$로 나누었을 때, 나머지가 각각 5, 3이라 한다. 이 때, 다항식 $f(x)$를 x^2-4로 나눈 나머지를 구하면 $ax+b$이다. $4a+b$의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$f(2)=5,\ f(-2)=3$

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2-4)Q(x)+ax+b \\ &= (x-2)(x+2)Q(x)+ax+b \end{aligned}$$

$f(2)=2a+b=5,\ f(-2)=-2a+b=3$

$a=\frac{1}{2},\ b=4$

5. 다항식 $f(x)$ 를 $2x-1$ 로 나누면 나머지는 -4 이고, 그 몫을 $x+2$ 로 나누면 나머지는 2 이다. 이때, $f(x)$ 를 $x+2$ 로 나눌 때의 나머지를 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : -14

해설

$f(x)=(2x-1)Q(x)-4$ 라 하면
$f(-2)=-5Q(-2)-4$
그런데 $Q(-2)=2$ 이므로 $f(-2)=-14$

6. 이차식 $f(x)$를 각각 $x-3$, $x+1$로 나눈 나머지는 같고, $f(1)=0$일 때, $\dfrac{f(4)}{f(-4)}=\dfrac{n}{m}$ (m, n은 서로소)이다. 이 때, $m+n$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 34

해설

$f(1)=0$ 이므로 $f(x)$ 는 $x-1$을 인수로 갖는다.

$\therefore\ f(x)=(x-1)(ax+b)$

$f(3)=f(-1)$ 이므로 $2(3a+b)=-2(-a+b)$

$\therefore\ a=-b$

$\dfrac{f(4)}{f(-4)}=\dfrac{3(4a+b)}{-5(-4a+b)}=\dfrac{-9b}{-25b}=\dfrac{9}{25}$

$\therefore\ m=25,\ n=9$

7. $x+y+z=0$, $x^2+y^2+z^2=4$ 일 때, $x^4+y^4+z^4$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$
$0 = 4+2(xy+yz+zx)$
$\therefore\ xy+yz+zx=-2$

$(xy+yz+zx)^2$
$= x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+2(xy^2z+xyz^2+x^2yz)$
$= x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+2xyz(x+y+z)$
$4 = x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+0$
$\therefore\ x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2=4$

$(x^2+y^2+z^2)^2 = x^4+y^4+z^4+2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)$
$16 = x^4+y^4+z^4+2\cdot 4$
$\therefore\ x^4+y^4+z^4=8$

8. x에 대한 다항식 $P(x)$를 $x-2$로 나눈 나머지가 5이고, 그 몫을 다시 $x+3$으로 나눈 나머지가 3일 때, $xP(x)$를 $x+3$으로 나눈 나머지를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 30

해설

x에 대한 다항식 $P(x)$를 $x-2$로 나눈 몫을 $Q(x)$,
$Q(x)$를 $x+3$으로 나눈 몫을 $Q_1(x)$라 하면
$P(x) = (x-2)Q(x)+5, Q(x) = (x+3)Q_1(x)+3$이므로
$P(x) = (x-2)\{(x+3)Q_1(x)+3\}+5$
$\quad = (x-2)(x+3)Q_1(x)+3x-1$
$\therefore\ P(-3) = -9-1 = -10$
따라서 $xP(x)$를 $x+3$으로 나눈 나머지는
$-3P(-3) = -3\times(-10) = 30$

해설

나머지정리에 의해 $Q(-3) = 3$
$P(x) = (x-2)Q(x)+5$에서 양변에 x를 곱하면
$xP(x) = x(x-2)Q(x)+5x\cdots$ ①
나머지정리에 의해 $xP(x)$를 $x+3$로 나눈 나머지는 $-3P(-3)$이다.
①의 양변에 $x=-3$을 대입하면
$-3P(-3) = -3\cdot(-5)Q(-3)-15$
$Q(-3)=3$을 대입하면 $-3P(-3)=30$

9. x에 관한 다항식 $f(x)$를 x^2+1로 나누면 나머지가 $x+1$이고, $x-1$로 나누면 나머지가 4이다. 이 다항식 $f(x)$를 $(x^2+1)(x-1)$로 나눌 때의 나머지의 상수항을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$f(x)$를 $(x^2+1)(x-1)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 ax^2+bx+c(단, a, b, c는 상수) 라고 하면,
$f(x)=(x^2+1)(x-1)Q(x)+ax^2+bx+c$
그런데 $f(x)$를 x^2+1로 나누면 나머지가 $x+1$이므로
$f(x)=(x^2+1)(x-1)Q(x)+a(x^2+1)+(x+1)$
또 $f(x)$를 $x-1$로 나누면 나머지가 4이므로
$f(1)=2a+2=4$에서 $a=1$
따라서 $ax^2+bx+c=a(x^2+1)+x+1=x^2+x+2$
$\therefore$구하는 나머지의 상수항은 2

10. $x^{113}+1$ 을 x^3+x 로 나누었을 때, 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)$ 라고 하자. 이때, $R(2006)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2007

해설

$$\begin{aligned} x^{113}+1 &= (x^3+x)Q(x)+R(x) \\ &= x(x^2+1)Q(x)+ax^2+bx+c \end{aligned}$$

항등식이므로 $x=0, x^2=-1$ 을 각각 대입하면,

$1=c,\ x+1=-a+bx+c$

$\therefore a=0,\ b=1$

$\therefore R(x)=x+1$

따라서 $R(2006)=2007$