1. 복소수 z 와 그의 켤레복소수 $\bar{z}$ 에 대하여 등식 $(1-2i)z - i\bar{z} = 3-5i$ 를 만족하는 z 는?

① $1+i$　　② $2+i$　　③ $2+2i$

④ $1-i$　　⑤ $2-i$

해설

$z = a+bi$ 라 하면 $\bar{z} = a-bi$ 이므로

$(1-2i)(a+bi) - i(a-bi) = a+bi-2ai+2b-ai-b$

$= (a+b) + (-3a+b)i = 3-5i$

따라서 $a+b=3$, $-3a+b=-5$ 이므로 연립하여 풀면

$a=2$, $b=1$

따라서 $z = 2+i$ 이다.

2. 등식 $(1+i)z+(2\bar{z}-3i)i=0$ 을 만족하는 복소수 z 는?

① $3+9i$ ② $-3+9i$ ③ $3-9i$
④ $\frac{3}{10}-\frac{9}{10}i$ ⑤ $-\frac{3}{10}+\frac{9}{10}i$

해설

$z=a+bi$ (a, b 는 실수) 로 놓으면
$(1+i)(a+bi)+\{2(a+bi)-3i\}i=0$
$(a+bi+ai-b)+(2ai-2b+3)=0$
$(a-3b+3)+(3a+b)i=0$
복소수가 서로 같을 조건에 의하여
$a-3b+3=0$, $3a+b=0$
두 식을 연립하여 풀면
$a=-\frac{3}{10}$, $b=\frac{9}{10}$
$\therefore\ z=-\frac{3}{10}+\frac{9}{10}i$

3. 복소수 z 에 대하여 $z\bar{z}=13$, $z+\bar{z}=4$ 일 때, 복소수 z 는? (단, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수이다.)

① $2-2i$　　② $2\pm3i$　　③ $2\pm\sqrt{3}i$

④ $3\pm2i$　　⑤ $4\pm3i$

해설

$z=a+bi$ ($a,\ b$ 는 실수) 로 놓으면 $\bar{z}=a-bi$ 이므로

$z\bar{z}=13$, $z+\bar{z}=4$ 에서

$(a+bi)(a-bi)=13$, $(a+bi)+(a-bi)=4$

$a^2+b^2=13$, $2a=4$

$\therefore\ A=2,\ b=\pm3$

$z=2\pm3i$

4. 실수 x 에 대하여, $\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-2}} = -\sqrt{\dfrac{x+1}{x-2}}$ 이 성립할 때, $|x+1| + |x-2|$ 의 값을 구하면? (단, $(x+1)(x-2) \neq 0$)

① $2x-1$　　② $-2x+1$　　③ 3

④ -3　　⑤ $x+1$

해설

$\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = -\sqrt{\dfrac{b}{a}}$ 을 만족하려면,

$a < 0,\ \ b \geq 0$ 이다.

따라서 $x+1 \geq 0,\ x-2 < 0,\ -1 \leq x < 2,\ x \neq -1,\ x \neq 2$

$\therefore\ -1 < x < 2$

$\therefore |x+1| + |x-2| = x+1-x+2 = 3$

5. 다음 <보기>에서 계산 중 잘못된 것을 모두 고르면? (단, $i = \sqrt{-1}$)

보기

Ⅰ. $\sqrt{-3}\sqrt{-3} = \sqrt{(-3)\cdot(-3)} = \sqrt{9} = 3$
Ⅱ. $\sqrt{5}\sqrt{-2} = \sqrt{5\times(-2)} = \sqrt{-10} = \sqrt{10}i$
Ⅲ. $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{-6}} = \sqrt{\dfrac{2}{-6}} = \sqrt{-\dfrac{1}{3}} = \sqrt{\dfrac{1}{3}}i$
Ⅳ. $\dfrac{\sqrt{-10}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\dfrac{-10}{2}} = \sqrt{-5} = \sqrt{5}i$

① Ⅰ, Ⅱ ② Ⅰ, Ⅲ ③ Ⅱ, Ⅲ, Ⅳ
④ Ⅱ, Ⅳ ⑤ Ⅲ, Ⅳ

해설

Ⅰ. $\sqrt{-3}\sqrt{-3} = \sqrt{3}i\sqrt{3}i = \sqrt{9}i^2 = -3$
∴ 옳지 않다.
Ⅱ. $\sqrt{5}\sqrt{-2} = \sqrt{5}\sqrt{2}i = \sqrt{10}i$
∴ 옳다.
Ⅲ. $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{-6}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}i} = \sqrt{\dfrac{2}{6}}\cdot\dfrac{i}{i^2} = -\sqrt{\dfrac{1}{3}}i$
∴ 옳지 않다.
Ⅳ. $\dfrac{\sqrt{-10}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{10}i}{\sqrt{2}} = \sqrt{\dfrac{10}{2}}i = \sqrt{5}i$
∴ 옳다.

6. 다음 계산 과정에서 최초로 틀린 부분은?

$$
\begin{aligned}
\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{-2}} &= \boxed{㉠} \frac{\sqrt{8}\cdot\sqrt{-2}}{\sqrt{-2}\cdot\sqrt{-2}} \\
&= \boxed{㉡} \frac{\sqrt{-16}}{\sqrt{-2}\cdot\sqrt{-2}} \\
&= \boxed{㉢} \frac{\sqrt{-16}}{2} \\
&= \boxed{㉣} \frac{4i}{2} \\
&= \boxed{㉤} = \sqrt{-4}
\end{aligned}
$$

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉢

해설

$\sqrt{-2}\sqrt{-2} = \sqrt{2}i\sqrt{2}i = 2i^2 = -2$

따라서 최초로 틀린 부분은 ㉢이다.

7. 복소수 $z = a + bi$ 가 다음 두 조건을 만족한다.

$(1 + i + z)^2 < 0 \qquad z^2 = c + 4i$

이 때, $a^2 + b^2 + c^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

$(1 + i + z)^2 < 0$ 에서 $1 + i + z$ 는 순허수이다.

$z = a + bi$ 라면

$1 + i + z = 1 + i + a + bi = (1 + a) + (1 + b)i$

이것이 순허수이므로 $1 + a = 0$, $a = -1$

$\therefore\ z = -1 + bi$

또한 $z^2 = c + 4i$ 에서 $(-1 + bi)^2 = c + 4i$

$1 - 2bi - b^2 = c + 4i$

$\therefore\ -2b = 4$, $1 - b^2 = c$

$\therefore\ b = -2,\ c = -3$

$\therefore\ a^2 + b^2 + c^2 = 14$

8. $\dfrac{\overline{z}+1}{z}+\dfrac{z-1}{\overline{z}}=i$를 만족하는 복소수 z에 대하여 z^2의 값을 구하면?

① ±1 ② $\pm2i$ ③ ±2 ④ $\pm i$ ⑤ 0

해설

$$\begin{cases} z=a+bi \\ z=a-bi \end{cases}$$

$$\frac{\overline{z}+1}{z}+\frac{z-1}{\overline{z}}=i$$

$$\frac{\overline{z}^2+\overline{z}+z^2-z}{z\overline{z}}=i$$

$$\frac{a^2-2abi-b^2+a-bi+a^2+2abi-b^2-a-bi}{a^2+b^2}$$

$$=i$$

$$\frac{2(a^2-b^2)}{a^2+b^2}+\frac{-2b}{a^2+b^2}i=i$$

$$a^2=b^2,\ \frac{-2b}{a^2+b^2}=+1$$

$$\therefore\ a=\pm1, b=-1$$

$$z=\pm1-i\ ,\ z^2=\pm2i$$

9. 양의 실수 a, b에 대하여 다음 복소수 중 $z = a(1+i) + b(1-i)$ (i는 허수단위) 의 꼴로 나타낼 수 있는 것은?

① $-3+i$ ② $2+3i$ ③ $5-2i$

④ $1-3i$ ⑤ $-4-2i$

해설

$z = (a+b) + (a-b)i \in A \ (a>0,\ b>0)$

① $a+b=-3,\ a-b=1$

$\therefore\ a=-1,\ b=-2$ (부적당)

② $a+b=2,\ a-b=3$

$\therefore\ a=\frac{5}{2},\ b=-\frac{1}{2}$ (부적당)

③ $a+b=5,\ a-b=-2$

$\therefore\ a=\frac{3}{2},\ b=\frac{7}{2}$ (양의 실수)

④ $a+b=1,\ a-b=-3$

$\therefore\ a=-1,\ b=2$ (부적당)

⑤ $a+b=-4,\ a-b=-2$

$\therefore\ a=-3,\ b=-1$ (부적당)

10. z를 입력시키면 zi가 출력되는 컴퓨터 프로그램이 있다. 어떤 수를 이 프로그램에 입력시켜 나온 결과를 다시 프로그램에 입력시키는 과정을 100번 반복하니 2^{100}이 나왔다. 처음에 입력된 수는 무엇인가? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① $1+i$ ② $1-i$ ③ $2i$ ④ 2 ⑤ 2^{100}

해설

$z \to zi \to zi^2 \to zi^3 \to \cdots \to zi^{100}$
$\therefore zi^{100} = 2^{100}$
$\therefore z = 2^{100}$

11. 정수 n에 대하여, $z = i^n + \frac{1}{i^n}$ 을 만족하는 실수의 개수는?

① 1개　② 2개　③ 3개　④ 4개　⑤ 5개

해설

$z = i^n + \frac{1}{i^n}$ 에서

$n = 1$ 일 때, $i + \frac{1}{i} = i - i = 0$

$n = 2$ 일 때, $-1 + \frac{1}{-1} = -1 - 1 = -2$

$n = 3$ 일 때, $-i + \frac{1}{-i} = 0$

$n = 4$ 일 때, $1 + \frac{1}{1} = 2$

따라서, $z = -2,\ 0,\ 2$ 이므로 3개이다.

12. $A = \dfrac{1-i}{1+i}$ 일 때, $1 + A + A^2 + A^3 + \ \cdots \ + A^{2005}$ 의 값은?

① $-i$ ② 1 ③ 0 ④ $1+i$ ⑤ $1-i$

해설

$A = \dfrac{1-i}{1+i} = -i$

$1 + A + A^2 + A^3 + \ A^4 + \cdots + A^{2005}$

$= 1 + \{(-i) + (-1) + i + 1\} + \cdots + (-i)$

$= 1 - i$

13. $f(x)=\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{100}$ 일 때, $f\left(\frac{1+i}{1-i}\right)$ 의 값은?

① 1 ② $1-i$ ③ $1+i$ ④ -1 ⑤ 0

해설

$\frac{1+i}{1-i}=i$ 이므로

$f\left(\frac{1+i}{1-i}\right)=f(i)=\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{100}=i^{100}=1$

14. $f(x)=\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^{98}$ 일 때, $f\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)+f\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$\dfrac{1-i}{1+i}=-i$, $\dfrac{1+i}{1-i}=i$ 이므로

$f(\dfrac{1-i}{1+i})+f(\dfrac{1+i}{1-i})$

$=f(-i)+f(i)$

$=\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{98}+\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^{98}$

$=i^{98}+(-i)^{98}$

$=i^2+i^2$

$=-2$

15. 복소수 z에 대해 $z = i^m + i^n, m, n$은 양의 정수인 z의 개수를 구하면 몇 개나 될 것인지 구하면? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① 6 개 ② 7 개 ③ 8 개 ④ 9 개 ⑤ 10 개

해설

$m = 1, n = 1, z = i + i = 2i$
$m = 1, n = 2, z = i - 1$
$m = 1, n = 3, z = i - i = 0$
$m = 1, n = 4, z = i + 1$
$m = 1, n = 5, z = i + i = 2i$

	1	2	3	4
1	$2i$	$i - 1$	0	$i + 1$
2	$-1 + i$	-2	$-1 - i$	0
3	0	$-i - 1$	$-2i$	$-i + 1$
4	$1 + i$	0	$1 - i$	2

$z = 0, 2, -2, 2i, -2i, 1 + i, -1 + i, -1 - i, 1 - i$
$\therefore$ 9 개

16. $z^2 = \sqrt{5} + i$ 를 만족하는 복소수 z 에 대하여 $z\bar{z}$ 의 값은? (단, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수)

① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ 2 ④ $\sqrt{5}$ ⑤ $\sqrt{6}$

해설

$z = x + yi$ ($x,\ y$ 는 실수)로 놓으면 $(x+yi)^2 = \sqrt{5} + i$
$x^2 - y^2 + 2xyi = \sqrt{5} + i$ 에서 복소수가 서로 같을 조건에 의하여
$x^2 - y^2 = \sqrt{5},\ 2xy = 1$
$z\bar{z} = (x+yi)(x-yi) = x^2 + y^2$ 이므로

$$(x^2+y^2)^2 = (x^2-y^2)^2 + 4x^2y^2 = (\sqrt{5})^2 + 4\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 6$$

$x^2 + y^2 > 0$ 이므로 $x^2 + y^2 = \sqrt{6}$
$\therefore\ z\bar{z} = \sqrt{6}$

해설

$z^2 = \sqrt{5} + i$, $\overline{z^2} = \sqrt{5} - i$
$z^2\overline{z^2} = (\sqrt{5}+i)(\sqrt{5}-i) = 6$
$z\bar{z} = \pm\sqrt{6}$
$z\bar{z} \geq 0$ 이므로 $z\bar{z} = \sqrt{6}$

17. 방정식 $x^2 + x + 1 = 0$ 의 한 근을 w 라 할 때, $z = \dfrac{3w+1}{w+1}$ 이라 하면,

$z\overline{z}$ 의 값은?
(단, $\overline{z}$ 는 z 의 켤레복소수)

① 7　　② 6　　③ 5　　④ 4　　⑤ 3

해설

$x^2 + x + 1 = 0$ 의 한 근을 w 라 하면, 다른 근은 $\overline{w}$ 이다.
$w + \overline{w} = -1,\ w\overline{w} = 1$

$$\begin{aligned} z\overline{z} &= \frac{3w+1}{w+1} \cdot \frac{3\overline{w}+1}{\overline{w}+1} \\ &= \frac{9w\overline{w} + 3(w+\overline{w}) + 1}{w\overline{w} + (w+\overline{w}) + 1} \\ &= 7 \end{aligned}$$

18. $x^2-x+1=0$ 의 한 근을 z라 한다. $p=\dfrac{1+z}{3-z}$ 일 때, $7p\cdot\overline{p}$ 의 값을 구하면?

① 5　　② 4　　③ 3　　④ 2　　⑤ 1

해설

$x^2-x+1=0$ 의 근이 $z,\ \overline{z}$ 이므로

$z+\overline{z}=1,\ z\overline{z}=1$

$$\begin{aligned}7p\cdot\overline{p}&=7\left(\frac{1+z}{3-z}\right)\left(\overline{\frac{1+z}{3-z}}\right)\\&=7\left(\frac{1+z}{3-z}\right)\left(\frac{1+\overline{z}}{3-\overline{z}}\right)\\&=7\left\{\frac{1+(z+\overline{z})+z\cdot\overline{z}}{9-3(z+\overline{z})+z\cdot\overline{z}}\right\}\\&=3\end{aligned}$$

19. $\alpha=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$, $\beta=\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$ 일 때, $\alpha^{99}+\beta^{99}$ 의 값을 구하면?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

$\alpha=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}, \beta=\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$ 에서 각각 양변에 2를 곱하고 1을 이항한 후 양변을 제곱해서 정리하면

$\alpha^2-\alpha+1=0, \beta^2-\beta+1=0$

두 식에 각각 $\alpha+1, \beta+1$ 를 곱하면

$(\alpha+1)(\alpha^2-\alpha+1)=0, (\beta+1)(\beta^2-\beta+1)=0$

$\therefore\ \alpha^3=-1, \beta^3=-1$

$\therefore \alpha^{99}+\beta^{99}=\left(\alpha^3\right)^{33}+\left(\beta^3\right)^{33}=-1-1=-2$

해설

$\alpha+\beta=1, \alpha\beta=1$ 이므로

α, β 를 두 근으로 하는 이차방정식을 만들면

$x^2-x+1=0$

$\therefore (x+1)\left(x^2-x+1\right)=\left(x^3+1\right)=0$

$\alpha^3=-1, \beta^3=-1$

$\therefore \alpha^{99}+\beta^{99}=\left(\alpha^3\right)^{33}+\left(\beta^3\right)^{33}=-1-1=-2$

20. $x = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}$ 일 때, $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1$ 의 값은? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① 0　　② $\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$　　③ $\frac{1-\sqrt{3}i}{2}$

④ $\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$　　⑤ $\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

해설

$x = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}$ 의 양변에 2를 곱하고 1을 이항한 후 양변을 제곱해서 정리하면, $x^2 - x + 1 = 0$

$x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1$ 를 $x^2 - x + 1$ 로 직접 나누면

몫이 $x^3 + 2x^2 + 2x + 1$ 이고 나머지는 $-x$ 이다.

즉, $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1$

$= (x^2 - x + 1)(x^3 + 2x^2 + 2x + 1) - x$

$\therefore\ x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1$

$= -x\ (\because x^2 - x + 1 = 0)$

$= \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

해설

$x^2 - x + 1 = 0$ 을 만든 다음 양변에 $x + 1$ 를 곱하면

$(x+1)(x^2 - x + 1) = 0 \Rightarrow x^3 + 1 = 0 \Rightarrow x^3 = -1$

$$x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1 = -x^2 - x - 1 + x^2 + 1$$
$$= -x = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$$

21. $\alpha = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$, $\beta = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ 일 때, $(\alpha+1)^{10}+(\beta+1)^{10}$ 의 값은?

① -3 ② -1 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

해설

$\alpha = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$, $\beta = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ 에서 양변에 2를 곱하고 -1을 이항한 후 양변을 제곱해서 정리하면

$\alpha^2+\alpha+1=0, \beta^2+\beta+1=0 \cdots$ ①

$\therefore\ \alpha+1=-\alpha^2, \beta+1=-\beta^2$

①의 양변에 각각 $\alpha-1, \beta-1$ 을 곱하면

$(\alpha-1)(\alpha^2+\alpha+1)=0, (\beta-1)(\beta^2+\beta+1)=0$

$\therefore\ \alpha^3=1, \beta^3=1$

$(\alpha+1)^{10}+(\beta+1)^{10}$

$=(-\alpha^2)^{10}+(-\beta^2)^{10}$

$=(\alpha^3)^6\cdot\alpha^2+(\beta^3)^6\cdot\beta^2$

$=\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$=-1$ ($\because\ \alpha+\beta=-1, \alpha\beta=1$)

해설

$\alpha+1=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$, $\beta+1=\frac{1-\sqrt{3}i}{2}$

$\alpha+1=A,\ \beta+1=B$ 라 하면

$A+B=1, AB=1$ 이므로 $A,\ B$ 는

이차방정식 $x^2-x+1=0$ 의 두 근 이다.

$(x+1)\left(x^2-x+1\right)=x^3+1=0$

$\therefore x^3=-1, A^3=B^3=-1$

$$
\begin{aligned}
(\text{준식}) = A^{10}+B^{10} &= \left(A^3\right)^3\cdot A+\left(B^3\right)^3\cdot B \\
&= -(A+B) \\
&= -1
\end{aligned}
$$