

1. 복소수 z 와 그의 켤레복소수 $\bar{z}$ 에 대하여 등식 $(1 - 2i)z - i\bar{z} = 3 - 5i$ 를 만족하는 z 는?

① $1 + i$

② $2 + i$

③ $2 + 2i$

④ $1 - i$

⑤ $2 - i$

해설

$z = a + bi$ 라 하면 $\bar{z} = a - bi$ 이므로

$$\begin{aligned}(1 - 2i)(a + bi) - i(a - bi) &= a + bi - 2ai + 2b - ai - b \\ &= (a + b) + (-3a + b)i = 3 - 5i\end{aligned}$$

따라서 $a + b = 3$, $-3a + b = -5$ 이므로 연립하여 풀면

$$a = 2, b = 1$$

따라서 $z = 2 + i$ 이다.

2. 등식 $(1+i)z + (2z-3i)i = 0$ 을 만족하는 복소수 z 는?

① $3+9i$

② $-3+9i$

③ $3-9i$

④ $\frac{3}{10} - \frac{9}{10}i$

⑤ $-\frac{3}{10} + \frac{9}{10}i$

해설

$z = a + bi$ (a, b 는 실수) 로 놓으면

$$(1+i)(a+bi) + \{2(a+bi) - 3i\}i = 0$$

$$(a+bi+ai-b) + (2ai-2b+3) = 0$$

$$(a-3b+3) + (3a+b)i = 0$$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$a-3b+3=0, 3a+b=0$$

두 식을 연립하여 풀면

$$a = -\frac{3}{10}, b = \frac{9}{10}$$

$$\therefore z = -\frac{3}{10} + \frac{9}{10}i$$

3. 복소수 z 에 대하여 $z\bar{z} = 13$, $z + \bar{z} = 4$ 일 때, 복소수 z 는? (단, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수이다.)

① $2 - 2i$

② $2 \pm 3i$

③ $2 \pm \sqrt{3}i$

④ $3 \pm 2i$

⑤ $4 \pm 3i$

해설

$z = a + bi$ (a, b 는 실수) 로 놓으면 $\bar{z} = a - bi$ 이므로

$z\bar{z} = 13$, $z + \bar{z} = 4$ 에서

$$(a + bi)(a - bi) = 13, (a + bi) + (a - bi) = 4$$

$$a^2 + b^2 = 13, 2a = 4$$

$$\therefore a = 2, b = \pm 3$$

$$z = 2 \pm 3i$$

4. 실수 x 에 대하여, $\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-2}} = -\sqrt{\frac{x+1}{x-2}}$ 이 성립할 때, $|x+1| + |x-2|$ 의 값을 구하면? (단, $(x+1)(x-2) \neq 0$)

① $2x - 1$

② $-2x + 1$

③ 3

④ -3

⑤ $x + 1$

해설

$$\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = -\sqrt{\frac{b}{a}} \text{ 을 만족하려면,}$$

$$a < 0, \quad b \geq 0 \text{ 이다.}$$

$$\text{따라서 } x+1 \geq 0, \quad x-2 < 0, \quad -1 \leq x < 2, \quad x \neq -1, \quad x \neq 2$$

$$\therefore -1 < x < 2$$

$$\therefore |x+1| + |x-2| = x+1 - x+2 = 3$$

5. 다음 <보기>에서 계산 중 잘못된 것을 모두 고르면? (단, $i = \sqrt{-1}$)

보기

$$\text{I. } \sqrt{-3}\sqrt{-3} = \sqrt{(-3) \cdot (-3)} = \sqrt{9} = 3$$

$$\text{II. } \sqrt{5}\sqrt{-2} = \sqrt{5 \times (-2)} = \sqrt{-10} = \sqrt{10}i$$

$$\text{III. } \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{-6}} = \sqrt{\frac{2}{-6}} = \sqrt{-\frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{1}{3}}i$$

$$\text{IV. } \frac{\sqrt{-10}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{-10}{2}} = \sqrt{-5} = \sqrt{5}i$$

① I, II

② I, III

③ II, III, IV

④ II, IV

⑤ III, IV

해설

$$\text{I. } \sqrt{-3}\sqrt{-3} = \sqrt{3}i\sqrt{3}i = \sqrt{9}i^2 = -3$$

∴ 옳지 않다.

$$\text{II. } \sqrt{5}\sqrt{-2} = \sqrt{5}\sqrt{2}i = \sqrt{10}i$$

∴ 옳다.

$$\text{III. } \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{-6}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}i} = \sqrt{\frac{2}{6}} \cdot \frac{i}{i^2} = -\sqrt{\frac{1}{3}}i$$

∴ 옳지 않다.

$$\text{IV. } \frac{\sqrt{-10}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}i}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{10}{2}}i = \sqrt{5}i$$

∴ 옳다.

6. 다음 계산 과정에서 최초로 틀린 부분은?

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{-2}} &= \boxed{\text{㉠}} \frac{\sqrt{8} \cdot \sqrt{-2}}{\sqrt{-2} \cdot \sqrt{-2}} \\ &= \boxed{\text{㉡}} \frac{\sqrt{-16}}{\sqrt{-2} \cdot \sqrt{-2}} \\ &= \boxed{\text{㉢}} \frac{\sqrt{-16}}{2} \\ &= \boxed{\text{㉤}} \frac{4i}{2} \\ &= \boxed{\text{㉥}} = \sqrt{-4}\end{aligned}$$

▶ 답 :

▶ 정답 : ㉢

해설

$$\sqrt{-2} \sqrt{-2} = \sqrt{2}i \sqrt{2}i = 2i^2 = -2$$

따라서 최초로 틀린 부분은 ㉢이다.

7. 복소수 $z = a + bi$ 가 다음 두 조건을 만족한다.

$$(1 + i + z)^2 < 0 \quad z^2 = c + 4i$$

이 때, $a^2 + b^2 + c^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

$(1 + i + z)^2 < 0$ 에서 $1 + i + z$ 는 순허수이다.

$z = a + bi$ 라면

$$1 + i + z = 1 + i + a + bi = (1 + a) + (1 + b)i$$

이것이 순허수이므로 $1 + a = 0$, $a = -1$

$$\therefore z = -1 + bi$$

또한 $z^2 = c + 4i$ 에서 $(-1 + bi)^2 = c + 4i$

$$1 - 2bi - b^2 = c + 4i$$

$$\therefore -2b = 4, 1 - b^2 = c$$

$$\therefore b = -2, c = -3$$

$$\therefore a^2 + b^2 + c^2 = 14$$

8. $\frac{\bar{z}+1}{z} + \frac{z-1}{\bar{z}} = i$ 를 만족하는 복소수 z 에 대하여 z^2 의 값을 구하면?

① ± 1

② $\pm 2i$

③ ± 2

④ $\pm i$

⑤ 0

해설

$$\begin{cases} z = a + bi \\ z = a - bi \end{cases}$$

$$\frac{\bar{z}+1}{z} + \frac{z-1}{\bar{z}} = i$$

$$\frac{\bar{z}^2 + \bar{z} + z^2 - z}{z\bar{z}} = i$$

$$\frac{a^2 - 2abi - b^2 + a - bi + a^2 + 2abi - b^2 - a - bi}{a^2 + b^2}$$

$$= i$$

$$\frac{2(a^2 - b^2)}{a^2 + b^2} + \frac{-2b}{a^2 + b^2}i = i$$

$$a^2 = b^2, \frac{-2b}{a^2 + b^2} = +1$$

$$\therefore a = \pm 1, b = -1$$

$$z = \pm 1 - i, z^2 = \pm 2i$$

9. 양의 실수 a, b 에 대하여 다음 복소수 중 $z = a(1+i) + b(1-i)$ (i 는 허수단위)의 꼴로 나타낼 수 있는 것은?

① $-3 + i$

② $2 + 3i$

③ $5 - 2i$

④ $1 - 3i$

⑤ $-4 - 2i$

해설

$$z = (a+b) + (a-b)i \in A \quad (a > 0, b > 0)$$

① $a+b = -3, a-b = 1$

$$\therefore a = -1, b = -2 \text{ (부적당)}$$

② $a+b = 2, a-b = 3$

$$\therefore a = \frac{5}{2}, b = -\frac{1}{2} \text{ (부적당)}$$

③ $a+b = 5, a-b = -2$

$$\therefore a = \frac{3}{2}, b = \frac{7}{2} \text{ (양의 실수)}$$

④ $a+b = 1, a-b = -3$

$$\therefore a = -1, b = 2 \text{ (부적당)}$$

⑤ $a+b = -4, a-b = -2$

$$\therefore a = -3, b = -1 \text{ (부적당)}$$

10. z 를 입력시키면 zi 가 출력되는 컴퓨터 프로그램이 있다. 어떤 수를 이 프로그램에 입력시켜 나온 결과를 다시 프로그램에 입력시키는 과정을 100번 반복하니 2^{100} 이 나왔다. 처음에 입력된 수는 무엇인가?
(단, $i = \sqrt{-1}$)

① $1 + i$

② $1 - i$

③ $2i$

④ 2

⑤ 2^{100}

해설

$$z \rightarrow zi \rightarrow zi^2 \rightarrow zi^3 \rightarrow \dots \rightarrow zi^{100}$$

$$\therefore zi^{100} = 2^{100}$$

$$\therefore z = 2^{100}$$

11. 정수 n 에 대하여, $z = i^n + \frac{1}{i^n}$ 을 만족하는 실수의 개수는?

① 1 개

② 2 개

③ 3 개

④ 4 개

⑤ 5 개

해설

$$z = i^n + \frac{1}{i^n} \text{ 에서}$$

$$n = 1 \text{ 일 때, } i + \frac{1}{i} = i - i = 0$$

$$n = 2 \text{ 일 때, } -1 + \frac{1}{-1} = -1 - 1 = -2$$

$$n = 3 \text{ 일 때, } -i + \frac{1}{-i} = 0$$

$$n = 4 \text{ 일 때, } 1 + \frac{1}{1} = 2$$

따라서, $z = -2, 0, 2$ 이므로 3 개이다.

12. $A = \frac{1-i}{1+i}$ 일 때, $1 + A + A^2 + A^3 + \dots + A^{2005}$ 의 값은?

① $-i$

② 1

③ 0

④ $1+i$

⑤ $1-i$

해설

$$A = \frac{1-i}{1+i} = -i$$

$$1 + A + A^2 + A^3 + A^4 + \dots + A^{2005}$$

$$= 1 + \{(-i) + (-1) + i + 1\} + \dots + (-i)$$

$$= 1 - i$$

13. $f(x) = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{100}$ 일 때, $f\left(\frac{1+i}{1-i}\right)$ 의 값은?

① 1

② $1-i$

③ $1+i$

④ -1

⑤ 0

해설

$$\frac{1+i}{1-i} = i \text{ 이므로}$$

$$f\left(\frac{1+i}{1-i}\right) = f(i) = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{100} = i^{100} = 1$$

14. $f(x) = \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{98}$ 일 때, $f\left(\frac{1-i}{1+i}\right) + f\left(\frac{1+i}{1-i}\right)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -2

해설

$$\frac{1-i}{1+i} = -i, \frac{1+i}{1-i} = i \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} & f\left(\frac{1-i}{1+i}\right) + f\left(\frac{1+i}{1-i}\right) \\ &= f(-i) + f(i) \\ &= \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{98} + \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{98} \\ &= i^{98} + (-i)^{98} \\ &= i^2 + i^2 \\ &= -2 \end{aligned}$$

15. 복소수 z 에 대해 $z = i^m + i^n, m, n$ 은 양의 정수인 z 의 개수를 구하면 몇 개나 될 것인지 구하면? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① 6개

② 7개

③ 8개

④ 9개

⑤ 10개

해설

$$m = 1, n = 1, z = i + i = 2i$$

$$m = 1, n = 2, z = i - 1$$

$$m = 1, n = 3, z = i - i = 0$$

$$m = 1, n = 4, z = i + 1$$

$$m = 1, n = 5, z = i + i = 2i$$

	1	2	3	4
1	$2i$	$i - 1$	0	$i + 1$
2	$-1 + i$	-2	$-1 - i$	0
3	0	$-i - 1$	$-2i$	$-i + 1$
4	$1 + i$	0	$1 - i$	2

$$z = 0, 2, -2, 2i, -2i, 1 + i, -1 + i, -1 - i, 1 - i$$

∴ 9개

16. $z^2 = \sqrt{5} + i$ 를 만족하는 복소수 z 에 대하여 $z\bar{z}$ 의 값은? (단, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수)

① $\sqrt{2}$

② $\sqrt{3}$

③ 2

④ $\sqrt{5}$

⑤ $\sqrt{6}$

해설

$$\begin{aligned} z &= x + yi \quad (x, y \text{ 는 실수}) \text{로 놓으면 } (x + yi)^2 = \sqrt{5} + i \\ x^2 - y^2 + 2xyi &= \sqrt{5} + i \text{ 에서 복소수가 서로 같을 조건에 의하여} \\ x^2 - y^2 &= \sqrt{5}, \quad 2xy = 1 \\ z\bar{z} &= (x + yi)(x - yi) = x^2 + y^2 \text{ 이므로} \end{aligned}$$

$$(x^2 + y^2)^2 = (x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2 = (\sqrt{5})^2 + 4\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 6$$

$$x^2 + y^2 > 0 \text{ 이므로 } x^2 + y^2 = \sqrt{6}$$

$$\therefore z\bar{z} = \sqrt{6}$$

해설

$$\begin{aligned} z^2 &= \sqrt{5} + i, \quad \bar{z}^2 = \sqrt{5} - i \\ z^2\bar{z}^2 &= (\sqrt{5} + i)(\sqrt{5} - i) = 6 \\ z\bar{z} &= \pm\sqrt{6} \\ z\bar{z} &\geq 0 \text{ 이므로 } z\bar{z} = \sqrt{6} \end{aligned}$$

17. 방정식 $x^2 + x + 1 = 0$ 의 한 근을 w 라 할 때, $z = \frac{3w+1}{w+1}$ 이라 하면,

$z\bar{z}$ 의 값은?

(단, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수)

① 7

② 6

③ 5

④ 4

⑤ 3

해설

$x^2 + x + 1 = 0$ 의 한 근을 w 라 하면, 다른 근은 $\bar{w}$ 이다.

$$w + \bar{w} = -1, w\bar{w} = 1$$

$$\begin{aligned} z\bar{z} &= \frac{3w+1}{w+1} \cdot \frac{3\bar{w}+1}{\bar{w}+1} \\ &= \frac{9w\bar{w} + 3(w + \bar{w}) + 1}{w\bar{w} + (w + \bar{w}) + 1} \\ &= 7 \end{aligned}$$

18. $x^2 - x + 1 = 0$ 의 한 근을 z 라 한다. $p = \frac{1+z}{3-z}$ 일 때, $7p \cdot \bar{p}$ 의 값을 구하면?

① 5

② 4

③ 3

④ 2

⑤ 1

해설

$x^2 - x + 1 = 0$ 의 근이 $z, \bar{z}$ 이므로
 $z + \bar{z} = 1, z\bar{z} = 1$

$$\begin{aligned} 7p \cdot \bar{p} &= 7 \left(\frac{1+z}{3-z} \right) \left(\overline{\frac{1+z}{3-z}} \right) \\ &= 7 \left(\frac{1+z}{3-z} \right) \left(\frac{1+\bar{z}}{3-\bar{z}} \right) \\ &= 7 \left\{ \frac{1 + (z + \bar{z}) + z \cdot \bar{z}}{9 - 3(z + \bar{z}) + z \cdot \bar{z}} \right\} \\ &= 3 \end{aligned}$$

19. $\alpha = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}, \beta = \frac{1 - \sqrt{3}i}{2}$ 일 때, $\alpha^{99} + \beta^{99}$ 의 값을 구하면?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}, \beta = \frac{1 - \sqrt{3}i}{2} \text{ 에서 각각 양변에 2를 곱하고 1을}$$

이항한 후 양변을 제곱해서 정리하면

$$\alpha^2 - \alpha + 1 = 0, \beta^2 - \beta + 1 = 0$$

두 식에 각각 $\alpha + 1, \beta + 1$ 를 곱하면

$$(\alpha + 1)(\alpha^2 - \alpha + 1) = 0, (\beta + 1)(\beta^2 - \beta + 1) = 0$$

$$\therefore \alpha^3 = -1, \beta^3 = -1$$

$$\therefore \alpha^{99} + \beta^{99} = (\alpha^3)^{33} + (\beta^3)^{33} = -1 - 1 = -2$$

해설

$$\alpha + \beta = 1, \alpha\beta = 1 \text{ 이므로}$$

α, β 를 두 근으로 하는 이차방정식을 만들면

$$x^2 - x + 1 = 0$$

$$\therefore (x + 1)(x^2 - x + 1) = (x^3 + 1) = 0$$

$$\alpha^3 = -1, \beta^3 = -1$$

$$\therefore \alpha^{99} + \beta^{99} = (\alpha^3)^{33} + (\beta^3)^{33} = -1 - 1 = -2$$

20. $x = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}$ 일 때, $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1$ 의 값은? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① 0

② $\frac{1 + \sqrt{3}i}{2}$

③ $\frac{1 - \sqrt{3}i}{2}$

④ $\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$

⑤ $\frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$

해설

$x = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}$ 의 양변에 2를 곱하고 1을 이항한 후 양변을 제곱

해서 정리하면, $x^2 - x + 1 = 0$

$x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1$ 를 $x^2 - x + 1$ 로 직접 나누면

몫이 $x^3 + 2x^2 + 2x + 1$ 이고 나머지는 $-x$ 이다.

즉, $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1$

$= (x^2 - x + 1)(x^3 + 2x^2 + 2x + 1) - x$

$\therefore x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1$

$= -x (\because x^2 - x + 1 = 0)$

$= \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$

해설

$x^2 - x + 1 = 0$ 을 만든 다음 양변에 $x + 1$ 를 곱하면

$(x + 1)(x^2 - x + 1) = 0 \Rightarrow x^3 + 1 = 0 \Rightarrow x^3 = -1$

$x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1 = -x^2 - x - 1 + x^2 + 1$

$= -x = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$

21. $\alpha = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}, \beta = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$ 일 때, $(\alpha+1)^{10} + (\beta+1)^{10}$ 의 값은?

① -3

② -1

③ 0

④ 2

⑤ 4

해설

$$\alpha = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}, \beta = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} \text{ 에서 양변에 2를 곱하고 } -1 \text{ 을}$$

이항한 후 양변을 제곱해서 정리하면

$$\alpha^2 + \alpha + 1 = 0, \beta^2 + \beta + 1 = 0 \dots \textcircled{1}$$

$$\therefore \alpha + 1 = -\alpha^2, \beta + 1 = -\beta^2$$

①의 양변에 각각 $\alpha - 1, \beta - 1$ 을 곱하면

$$(\alpha - 1)(\alpha^2 + \alpha + 1) = 0, (\beta - 1)(\beta^2 + \beta + 1) = 0$$

$$\therefore \alpha^3 = 1, \beta^3 = 1$$

$$(\alpha + 1)^{10} + (\beta + 1)^{10}$$

$$= (-\alpha^2)^{10} + (-\beta^2)^{10}$$

$$= (\alpha^3)^6 \cdot \alpha^2 + (\beta^3)^6 \cdot \beta^2$$

$$= \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$$

$$= -1 \quad (\because \alpha + \beta = -1, \alpha\beta = 1)$$

해설

$$\alpha + 1 = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}, \beta + 1 = \frac{1 - \sqrt{3}i}{2}$$

$$\alpha + 1 = A, \beta + 1 = B \text{ 라 하면}$$

$$A + B = 1, AB = 1 \text{ 이므로 } A, B \text{ 는}$$

이차방정식 $x^2 - x + 1 = 0$ 의 두 근 이다.

$$(x + 1)(x^2 - x + 1) = x^3 + 1 = 0$$

$$\therefore x^3 = -1, A^3 = B^3 = -1$$

$$(\text{준식}) = A^{10} + B^{10} = (A^3)^3 \cdot A + (B^3)^3 \cdot B$$

$$= -(A + B)$$

$$= -1$$