

1. 복소수 z 와 그의 켤레복소수 $\bar{z}$ 에 대하여 등식 $(1-2i)z - i\bar{z} = 3-5i$ 를 만족하는 z 는?

① $1+i$

② $2+i$

③ $2+2i$

④ $1-i$

⑤ $2-i$

해설

$z = a + bi$ 라 하면 $\bar{z} = a - bi$ 이므로

$$(1-2i)(a+bi) - i(a-bi) = a+bi-2ai+2b-ai-b$$

$$= (a+b) + (-3a+b)i = 3-5i$$

따라서 $a+b=3$, $-3a+b=-5$ 이므로 연립하여 풀면

$$a=2, b=1$$

따라서 $z = 2+i$ 이다.

2. 복소수 z 와 그 켤레복소수 $\bar{z}$ 에 대하여 다음을 만족하는 z 를 구하면?

$z + \bar{z} = 4, \quad z \cdot \bar{z} = 7$

- ① $z = 1 \pm \sqrt{3}i$

②

 $z = 2 \pm \sqrt{3}i$

③ $z = 3 \pm \sqrt{3}i$
- ④ $z = 1 \pm 2\sqrt{3}i$

⑤ $z = 2 \pm 2\sqrt{3}i$

해설

$z = a + bi$
 $z + \bar{z} = 2a = 4, z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2 = 7$
 $\therefore a = 2, b = \pm \sqrt{3}$
 $\therefore z = 2 \pm \sqrt{3}i$

3. 등식 $(1+i)z + (2z-3i)i = 0$ 을 만족하는 복소수 z 는?

① $3+9i$

② $-3+9i$

③ $3-9i$

④ $\frac{3}{10} - \frac{9}{10}i$

⑤ $-\frac{3}{10} + \frac{9}{10}i$

해설

$z = a + bi$ (a, b 는 실수)로 놓으면
 $(1+i)(a+bi) + \{2(a+bi) - 3i\}i = 0$
 $(a+bi+ai-b) + (2ai-2b+3) = 0$
 $(a-3b+3) + (3a+b)i = 0$
복소수가 서로 같을 조건에 의하여
 $a-3b+3 = 0, 3a+b = 0$
두 식을 연립하여 풀면
 $a = -\frac{3}{10}, b = \frac{9}{10}$
 $\therefore z = -\frac{3}{10} + \frac{9}{10}i$

4. 실수 x 에 대하여, $\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-2}} = -\sqrt{\frac{x+1}{x-2}}$ 이 성립할 때, $|x+1| + |x-2|$ 의 값을 구하면? (단, $(x+1)(x-2) \neq 0$)

① $2x-1$

② $-2x+1$

③ 3

④ -3

⑤ $x+1$

해설

$$\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = -\sqrt{\frac{b}{a}} \text{ 을 만족하려면,}$$

$a < 0, b \geq 0$ 이다.

따라서 $x+1 \geq 0, x-2 < 0, -1 \leq x < 2, x \neq -1, x \neq 2$

$$\therefore -1 < x < 2$$

$$\therefore |x+1| + |x-2| = x+1 - x+2 = 3$$

5. 다음이 성립하도록 하는 실수 x 의 값의 범위는?

$$\sqrt{-x^2+5x-6} = -\sqrt{x-3}\sqrt{2-x}$$

- ① $x \geq 2$

② $x \leq 3$

③ $x \leq 2$
- ④ $x \geq 3$

⑤ $2 \leq x \leq 3$

해설

$$\sqrt{-x^2+5x-6} = -\sqrt{(x-3)(2-x)}$$
$$= -\sqrt{x-3}\sqrt{2-x} \text{ 이려면}$$

$(x-3)(2-x)$ 에서

$$\textcircled{1} \ x-3 \leq 0, \ x \leq 3$$

$$\textcircled{2} \ 2-x \leq 0, \ x \geq 2$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 동시에 만족시켜야 하므로

$$\therefore 2 \leq x \leq 3$$

6. 다음 <보기>에서 계산 중 잘못된 것을 모두 고르면? (단, $i = \sqrt{-1}$)

보기

- I. $\sqrt{-3}\sqrt{-3} = \sqrt{(-3) \cdot (-3)} = \sqrt{9} = 3$
II. $\sqrt{5}\sqrt{-2} = \sqrt{5 \times (-2)} = \sqrt{-10} = \sqrt{10}i$
III. $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{-6}} = \sqrt{\frac{2}{-6}} = \sqrt{-\frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{1}{3}}i$
IV. $\frac{\sqrt{-10}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{-10}{2}} = \sqrt{-5} = \sqrt{5}i$

- ① I, II ② I, III ③ II, III, IV
④ II, IV ⑤ III, IV

해설

- I. $\sqrt{-3}\sqrt{-3} = \sqrt{3}i\sqrt{3}i = \sqrt{9}i^2 = -3$
 $\therefore$ 옳지 않다.
II. $\sqrt{5}\sqrt{-2} = \sqrt{5}\sqrt{2}i = \sqrt{10}i$
 $\therefore$ 옳다.
III. $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{-6}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}i} = \sqrt{\frac{2}{6}} \cdot \frac{i}{i^2} = -\sqrt{\frac{1}{3}}i$
 $\therefore$ 옳지 않다.
IV. $\frac{\sqrt{-10}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}i}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{10}{2}}i = \sqrt{5}i$
 $\therefore$ 옳다.

7. 복소수 $(1+i)x^2 - (2+i)x - 3 - 2i$ 를 제곱하면 음의 실수가 된다고 할 때, 실수 x 의 값은?

① -1 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$$(\text{준식}) = x^2 - 2x - 3 + (x^2 - x - 2)i$$

이것을 제곱해서 음의 실수가 되려면 순허수이어야 하므로

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \cdots \text{㉠}, \quad x^2 - x - 2 \neq 0 \cdots \text{㉡}$$

$$\text{㉠에서 } x = 3, \quad x = -1$$

이 중에서 ㉡를 만족하는 것은 $\therefore x = 3$

8. 실수 k 에 대하여 복소수 $z = 3(k + i) - k(1 - i)^2$ 의 값이 순허수가 될 때, $z \cdot \bar{z}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$z = 3(k + i) - k(1 - i)^2$ 를 정리하면

$z = 3k + 3i + 2ki = 3k + (3 + 2k)i$

이것이 순허수이려면 $3k = 0$, $3 + 2k \neq 0$

$k = 0$ 이므로 $z = 3i$, $\bar{z} = -3i$

$\therefore z \cdot \bar{z} = 3i \cdot -3i = 9$

9. 복소수 $a^2(1+i) + a(3+2i) + 2$ 를 제곱하면 음의 실수가 된다. 이 때, 실수 a 의 값을 구하면? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 0 ⑤ 1

해설

(준식) $= (a^2 + 3a + 2) + (a^2 + 2a)i \Rightarrow$ 순허수
즉, $a^2 + 3a + 2 = 0$
 $a^2 + 2a \neq 0$ 이므로 $\therefore a = -1$

10. 복소수 $z = (1+i)x^2 + (5+2i)x + 3(2-i)$ 에서 z 가 순허수일 때, 실수 x 의 값은? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① -3

② -2

③ -1

④ 0

⑤ 1

해설

$$\begin{aligned} z &= (x^2 + 5x + 6) + (x^2 + 2x - 3)i \\ &= (x+2)(x+3) + (x-1)(x+3)i \end{aligned}$$

순허수가 되려면 실수부=0, 허수부 $\neq$ 0
 $\therefore x = -2$

11. x 가 실수일 때, 복소수 $(1+i)x^2 + 2(2+i)x + 3 - 3i$ 를 제곱하면 음의 실수가 된다. 이 때, x 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$$(\text{준식}) = (x^2 + 4x + 3) + (x^2 + 2x - 3)i$$

i 가 순허수이어야 제곱하면 음이 된다.

$$\therefore x^2 + 4x + 3 = 0 \text{ 이고 } x^2 + 2x - 3 \neq 0$$

$$x = -1 \text{ 또는 } x = -3 \cdots \textcircled{\text{㉠}}$$

$$x \neq 1 \text{ 그리고 } x \neq -3 \cdots \textcircled{\text{㉡}}$$

$\textcircled{\text{㉠}}, \textcircled{\text{㉡}}$ 에서 $x = -1$ 이다.

12. 복소수 $z = (1+i)x + 1 - 2i$ 에 대하여 z^2 이 음의 실수일 때, 실수 x 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $x = -1$

해설

$$z = (1+i)x + 1 - 2i = (x+1) + (x-2)i$$

z^2 의 음의실수 $\Leftrightarrow z$ 가 순허수

$$\therefore x+1=0, \quad x=-1$$

14. $\sqrt{(y-x)^2} + (y-1)i = -2x - 3i$ 를 만족하는 실수 x, y 에 대하여 $\frac{x}{y}$ 의 값은?

- ① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{1}{6}$

해설

$$\begin{aligned} |y-x| + (y-1)i &= -2x - 3i \\ |y-x| &= -2x \\ y-1 &= -3 \quad \therefore y = -2 \\ \text{(i) } y \geq x \text{ 일 때} \\ y-x &= -2x, y = -x, x = 2 \text{ (모순)} \\ \text{(ii) } y < x \text{ 일 때} \\ x-y &= -2x, y = 3x \\ \therefore x &= -\frac{2}{3} \text{ (정답)} \\ \therefore \frac{x}{y} &= \frac{x}{3x} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

15. 실수 x, y 대하여 $\frac{x}{1+i} + \frac{y}{1-i} = 2-i$ 가 성립할 때, $2x+y$ 의 값은?

- ① 8 ② 7 ③ 5 ④ 4 ⑤ $\frac{9}{5}$

해설

$$\frac{(1-i)x + (1+i)y}{(1+i)(1-i)} = 2-i$$

$$\frac{(x+y) - (x-y)i}{2} = 2-i$$

$$(x+y) - (x-y)i = 4-2i$$

복소수의 상등에 의해서

$$x+y = 4 \cdots \textcircled{1}, \quad x-y = 2 \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } x=3, y=1 \quad \therefore 2x+y=7$$

16. z 를 입력시키면 zi 가 출력되는 컴퓨터 프로그램이 있다. 어떤 수를 이 프로그램에 입력시켜 나온 결과를 다시 프로그램에 입력시키는 과정을 100번 반복하니 2^{100} 이 나왔다. 처음에 입력된 수는 무엇인가?
(단, $i = \sqrt{-1}$)

① $1+i$ ② $1-i$ ③ $2i$ ④ 2 ⑤ 2^{100}

해설

$$\begin{aligned} z &\rightarrow zi \rightarrow zi^2 \rightarrow zi^3 \rightarrow \dots \rightarrow zi^{100} \\ \therefore zi^{100} &= 2^{100} \\ \therefore z &= 2^{100} \end{aligned}$$

17. 다음 중 그 값이 $i+i^2+i^3+\cdots+i^{114}$ 의 값과 같은 것은? (단, $i=\sqrt{-1}$)

- ① $i+i^3+i^5+i^7+i^9+i^{11}$
- ② $i+i^4+i^7+i^{10}+i^{13}+i^{16}$
- ③ $i^2+i^5+i^8+i^{11}+i^{14}+i^{17}$
- ④ $i^3+i^6+i^9+i^{12}+i^{15}+i^{18}$
- ⑤ $\frac{1}{i}+\frac{1^2}{i}+\frac{1^3}{i}+\frac{1^4}{i}+\frac{1^5}{i}+\frac{1^6}{i}$

해설

i^n 의 주기성을 묻는 문제이다.
 $i=i, i^2=-1, i^3=i^2i=-i, i^4=(i^2)^2=(-1)^2=1$
이므로 곱에 대하여 주기가 4인 규칙을 지닌다.
(준식) $= (i+i^2+i^3+i^4) + (i^5+i^6+i^7+i^8) + \cdots + (i^{109}+i^{110}+i^{111}+i^{112}) + i^{113}+i^{114}$
 $= (i-1-i+1) + (i-1-i+1) + \cdots + (i-1-i+1) + i-1$
 $= i-1$
① (준식) $= (i-i+i-i) + i-i = 0$
② (준식) $= (i+1-i-1) + i+1 = i+1$
③ (준식) $= (-1+i+1-i) - 1+i = -1+i$
④ (준식) $= (-i-1+i+1) - i-1 = -i-1$
⑤ (준식) $= (-i-1+i+1) - i-1 = -i-1$

18. 정수 n 에 대하여, $z = i^n + \frac{1}{i^n}$ 을 만족하는 실수의 개수는?

- ① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

$$z = i^n + \frac{1}{i^n} \text{에서}$$

$$n = 1 \text{ 일 때, } i + \frac{1}{i} = i - i = 0$$

$$n = 2 \text{ 일 때, } -1 + \frac{1}{-1} = -1 - 1 = -2$$

$$n = 3 \text{ 일 때, } -i + \frac{1}{-i} = 0$$

$$n = 4 \text{ 일 때, } 1 + \frac{1}{1} = 2$$

따라서, $z = -2, 0, 2$ 이므로 3개이다.

19. $\alpha = 2 + i$, $\beta = 1 - 2i$ 일 때, $\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 + \frac{1}{\alpha\beta} + \left(\frac{1}{\beta}\right)^2$ 의 값은? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① $\frac{4}{8} - \frac{3}{8}i$
 ④ $\frac{4}{25} + \frac{3}{25}i$

② $\frac{4}{8} \pm \frac{3}{8}i$
 ⑤ $\frac{4}{8} + \frac{3}{8}i$

③ $\frac{4}{25} - \frac{3}{25}i$

해설

$$\alpha = 2 + i, \beta = 1 - 2i = -i(2 + i) = -i\alpha \text{ 이므로 } \beta^2 = -\alpha^2$$

$$\therefore \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} = \frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha^2} = 0$$

$$\begin{aligned} \therefore (\text{준식}) &= \frac{1}{\alpha\beta} \\ &= \frac{1}{(2+i)(1-2i)} \\ &= \frac{1}{4-3i} \\ &= \frac{4+3i}{25} \\ &= \frac{4}{25} + \frac{3}{25}i \end{aligned}$$

20. $x = 1 + \sqrt{2}i$, $y = 1 - \sqrt{2}i$ 일 때, $x^3 - y^3$ 의 값을 구하면?

① $2\sqrt{2}i$

② $-2\sqrt{2}i$

③ $\sqrt{2}i$

④ $-\sqrt{2}i$

⑤ $2i$

해설

$$x^3 - y^3 = (x - y)^3 + 3xy(x - y)$$

$$x - y = 2\sqrt{2}i, xy = (1 + \sqrt{2}i)(1 - \sqrt{2}i) = 3$$

$$\begin{aligned} x^3 - y^3 &= (2\sqrt{2}i)^3 + 3 \cdot 3 \cdot (2\sqrt{2}i) \\ &= -16\sqrt{2}i + 18\sqrt{2}i \\ &= 2\sqrt{2}i \end{aligned}$$

21. $x = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}, y = \frac{1 - \sqrt{3}i}{2}$ 일 때, $\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x}$ 의 값을 구하면?

① 0

② 1

③ -2

④ 3

⑤ -4

해설

$$x + y = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2} + \frac{1 - \sqrt{3}i}{2} = 1$$

$$xy = \left(\frac{1 + \sqrt{3}i}{2}\right)\left(\frac{1 - \sqrt{3}i}{2}\right) = \frac{1 - (-3)}{4} = 1$$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} &= \frac{x^3 + y^3}{xy} \\ &= \frac{(x + y)^3 - 3xy(x + y)}{xy} \\ &= -2\end{aligned}$$

22. $f(x) = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{100}$ 일 때, $f\left(\frac{1+i}{1-i}\right)$ 의 값은?

- ① 1 ② $1-i$ ③ $1+i$ ④ -1 ⑤ 0

해설

$\frac{1+i}{1-i} = i$ 이므로

$$f\left(\frac{1+i}{1-i}\right) = f(i) = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{100} = i^{100} = 1$$

23. 자연수 n 에 대하여 함수 $f(n)$ 과 다음과 같다고 하자.

$$f(n) \begin{cases} i^{n+1} (n = 4k) \\ -i^n (n = 4k + 1) (\text{단, } k \text{는 정수}) \\ 2i (n = 4k + 2) \\ -i (n = 4k + 3) \end{cases}$$

(단, k 는 정수) 이 때, $f(1) + f(2) + \cdots + f(2005)$ 를 구하면?

- ① i ② $-i$ ③ 0 ④ $500i$ ⑤ $501i$

해설

$$\begin{aligned} n = 4k &\Rightarrow f(n) = i^{4k+1} = i \\ n = 4k + 1 &\Rightarrow f(n) = -i^{4k+1} = -i \\ n = 4k + 2 &\Rightarrow f(n) = 2i \\ n = 4k + 3 &\Rightarrow f(n) = -i \\ \therefore f(1) + f(2) + f(3) + f(4) &= -i + 2i - i + i = i \\ &\text{계속 반복되므로} \\ f(1) + f(2) + \cdots + f(2005) &= i \times 501 + f(2005) \\ &= 501i - i = 500i \end{aligned}$$

24. 정수 n 에 대해 $z = i^n + i^{-n}, i = \sqrt{-1}$ 을 만족하는 z 의 개수는?

① 1개

② 2개

③ 3개

④ 4개

⑤ 4개보다 많다.

해설

정수 n 에 대하여 $i^n = i$ 또는 -1 또는 $-i$ 또는 1 ,
 $i^n = i$ 이면 $i^{-n} = -i$, $i^n = -1$ 이면

$i^{-n} = -1$, $i^n = -i$ 이면

$i^{-n} = i$, $i^n = 1$ 이면

$i^{-n} = 1$

$\therefore i^n + i^{-n} = 0, -2, 0, 2$

$\therefore z$ 는 3개다.