1. 복소수 z 와 그의 켤레복소수 $\bar{z}$ 에 대하여 등식 $(1-2i)z - i\bar{z} = 3-5i$ 를 만족하는 z 는?

① $1+i$　　② $2+i$　　③ $2+2i$

④ $1-i$　　⑤ $2-i$

해설

$z = a+bi$ 라 하면 $\bar{z} = a-bi$ 이므로

$(1-2i)(a+bi) - i(a-bi) = a+bi-2ai+2b-ai-b$

$= (a+b) + (-3a+b)i = 3-5i$

따라서 $a+b=3$, $-3a+b=-5$ 이므로 연립하여 풀면

$a=2$, $b=1$

따라서 $z = 2+i$ 이다.

2. 복소수 z와 그 켤레복소수 $\bar{z}$에 대하여 다음을 만족하는 z 를 구하면?

$$z+\bar{z}=4, \quad z\cdot\bar{z}=7$$

① $z=1\pm\sqrt{3}i$　② $z=2\pm\sqrt{3}i$　③ $z=3\pm\sqrt{3}i$

④ $z=1\pm2\sqrt{3}i$　⑤ $z=2\pm2\sqrt{3}i$

해설

$z=a+bi$

$z+\bar{z}=2a=4, z\cdot\bar{z}=a^2+b^2=7$

$\therefore a=2, b=\pm\sqrt{3}$

$\therefore z=2\pm\sqrt{3}i$

3. 등식 $(1+i)z+(2z-3i)i=0$ 을 만족하는 복소수 z 는?

① $3+9i$　　② $-3+9i$　　③ $3-9i$

④ $\frac{3}{10}-\frac{9}{10}i$　　⑤ $-\frac{3}{10}+\frac{9}{10}i$

해설

$z=a+bi$ ($a,\ b$ 는 실수)로 놓으면

$(1+i)(a+bi)+\left\{2(a+bi)-3i\right\}i=0$

$(a+bi+ai-b)+(2ai-2b+3)=0$

$(a-3b+3)+(3a+b)i=0$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a-3b+3=0$, $3a+b=0$

두 식을 연립하여 풀면

$a=-\frac{3}{10}$, $b=\frac{9}{10}$

$\therefore\ z=-\frac{3}{10}+\frac{9}{10}i$

4. 실수 x에 대하여, $\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-2}} = -\sqrt{\dfrac{x+1}{x-2}}$ 이 성립할 때, $|x+1|+|x-2|$ 의 값을 구하면? (단, $(x+1)(x-2) \neq 0$)

① $2x-1$ ② $-2x+1$ ③ 3

④ -3 ⑤ $x+1$

해설

$\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = -\sqrt{\dfrac{b}{a}}$ 을 만족하려면,

$a < 0, \quad b \geq 0$ 이다.

따라서 $x+1 \geq 0,\ x-2 < 0,\ -1 \leq x < 2,\ x \neq -1,\ x \neq 2$

$\therefore\ -1 < x < 2$

$\therefore |x+1|+|x-2| = x+1-x+2 = 3$

5. 다음이 성립하도록 하는 실수 x 의 값의 범위는?

$$\sqrt{-x^2+5x-6} = -\sqrt{x-3}\sqrt{2-x}$$

① $x \geq 2$ ② $x \leq 3$ ③ $x \leq 2$

④ $x \geq 3$ ⑤ $2 \leq x \leq 3$

해설

$$\sqrt{-x^2+5x-6} = -\sqrt{(x-3)(2-x)}$$
$$= -\sqrt{x-3}\sqrt{2-x}$$ 이려면

$(x-3)(2-x)$ 에서

㉠ $x-3 \leq 0, \quad x \leq 3$

㉡ $2-x \leq 0, \quad x \geq 2$

㉠, ㉡을 동시에 만족시켜야 하므로

$\therefore \ 2 \leq x \leq 3$

6. 다음 <보기>에서 계산 중 잘못된 것을 모두 고르면? (단, $i = \sqrt{-1}$)

보기

Ⅰ. $\sqrt{-3}\sqrt{-3} = \sqrt{(-3)\cdot(-3)} = \sqrt{9} = 3$

Ⅱ. $\sqrt{5}\sqrt{-2} = \sqrt{5\times(-2)} = \sqrt{-10} = \sqrt{10}i$

Ⅲ. $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{-6}} = \sqrt{\dfrac{2}{-6}} = \sqrt{-\dfrac{1}{3}} = \sqrt{\dfrac{1}{3}}i$

Ⅳ. $\dfrac{\sqrt{-10}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\dfrac{-10}{2}} = \sqrt{-5} = \sqrt{5}i$

① Ⅰ, Ⅱ
② Ⅰ, Ⅲ
③ Ⅱ, Ⅲ, Ⅳ
④ Ⅱ, Ⅳ
⑤ Ⅲ, Ⅳ

해설

Ⅰ. $\sqrt{-3}\sqrt{-3} = \sqrt{3}i\sqrt{3}i = \sqrt{9}i^2 = -3$

∴ 옳지 않다.

Ⅱ. $\sqrt{5}\sqrt{-2} = \sqrt{5}\sqrt{2}i = \sqrt{10}i$

∴ 옳다.

Ⅲ. $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{-6}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}i} = \sqrt{\dfrac{2}{6}}\cdot\dfrac{i}{i^2} = -\sqrt{\dfrac{1}{3}}i$

∴ 옳지 않다.

Ⅳ. $\dfrac{\sqrt{-10}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{10}i}{\sqrt{2}} = \sqrt{\dfrac{10}{2}}i = \sqrt{5}i$

∴ 옳다.

7. 복소수 $(1+i)x^2-(2+i)x-3-2i$를 제곱하면 음의 실수가 된다고 할 때, 실수 x의 값은?

① -1　② 1　③ 2　④ 3　⑤ 4

해설

(준식)$= x^2-2x-3+(x^2-x-2)i$

이것을 제곱해서 음의 실수가 되려면 순허수이어야 하므로

$x^2-2x-3=0 \cdots$ ㉠, $x^2-x-2 \neq 0 \cdots$ ㉡

㉠에서 $x=3,\ x=-1$

이 중에서 ㉡를 만족하는 것은 $\therefore\ x=3$

8. 실수 k 에 대하여 복소수 $z = 3(k+i) - k(1-i)^2$ 의 값이 순허수가 될 때, $z \cdot \bar{z}$ 의 값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 9

해설

$z = 3(k+i) - k(1-i)^2$ 를 정리하면

$z = 3k + 3i + 2ki = 3k + (3+2k)i$

이것이 순허수이려면 $3k = 0,\ 3 + 2k \neq 0$

$k = 0$ 이므로 $z = 3i,\ \bar{z} = -3i$

$\therefore z \cdot \bar{z} = 3i \cdot -3i = 9$

9. 복소수 $a^2(1+i)+a(3+2i)+2$를 제곱하면 음의 실수가 된다. 이 때, 실수 a의 값을 구하면? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① -3　　② -2　　③ -1　　④ 0　　⑤ 1

해설

$(\text{준식})=\left(a^2+3a+2\right)+\left(a^2+2a\right)i \Rightarrow$ 순허수

즉, $a^2+3a+2=0$

$a^2+2a\neq 0$이므로 $\therefore\ a=-1$

10. 복소수 $z=(1+i)x^2+(5+2i)x+3(2-i)$에서 z가 순허수일 때, 실수 x의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 0 ⑤ 1

해설

$$z=(x^2+5x+6)+(x^2+2x-3)i$$
$$=(x+2)(x+3)+(x-1)(x+3)i$$

순허수가 되려면 실수부$=0$, 허수부$\neq 0$

$\therefore\ x=-2$

11. x가 실수일 때, 복소수$(1+i)x^2+2(2+i)x+3-3i$를 제곱하면 음의 실수가 된다. 이 때, x의 값은?

① -2 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

(준식)$=(x^2+4x+3)+(x^2+2x-3)i$

i가 순허수이어야 제곱하면 음이 된다.

$\therefore\ x^2+4x+3=0$이고 $x^2+2x-3\neq 0$

$x=-1$ 또는 $x=-3\cdots$㉠

$x\neq 1$ 그리고 $x\neq -3\cdots$㉡

㉠, ㉡에서 $x=-1$이다.

12. 복소수 $z=(1+i)x+1-2i$에 대하여 z^2이 음의 실수일 때, 실수 x의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $x=-1$

해설

$z = (1+i)x+1-2i = (x+1)+(x-2)i$

z^2 의 음의실수 $\Leftrightarrow$ z가 순허수

$\therefore\ x+1=0,\quad x=-1$

13. 등식 $(x+yi)(z-i)=10$을 만족하는 자연수 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)의 개수를 구하여라. (단, $i=\sqrt{-1}$)

▶ **답 :** ______ 개

▷ **정답 :** 3개

해설

$(xz+y)+(yz-x)i=10$

$xz+y=10 \cdots$ ㉠, $yz-x=0 \cdots$ ㉡

㉡을 ㉠에 대입

$y(z^2+1)=10$

z를 기준으로 하여 순서쌍을 구해보면

$(5,\ 5,\ 1)$, $(4,\ 2,\ 2)$, $(3,\ 1,\ 3)$ 3개

14. $\sqrt{(y-x)^2}+(y-1)i=-2x-3i$ 를 만족하는 실수 x, y 에 대하여 $\dfrac{x}{y}$ 의 값은?

① $\dfrac{1}{2}$ ② $\dfrac{1}{3}$ ③ $\dfrac{1}{4}$ ④ $\dfrac{1}{5}$ ⑤ $\dfrac{1}{6}$

해설

$|y-x|+(y-1)i=-2x-3i$

$|y-x|=-2x$

$y-1=-3 \quad \therefore \ y=-2$

(i) $y \geq x$ 일 때

$y-x=-2x,\ y=-x,\ x=2$ (모순)

(ii) $y<x$ 일 때

$x-y=-2x,\ y=3x$

$\therefore \ x=-\dfrac{2}{3}$ (성립)

$\therefore \ \dfrac{x}{y}=\dfrac{x}{3x}=\dfrac{1}{3}$

15. 실수 x, y 대하여 $\dfrac{x}{1+i}+\dfrac{y}{1-i}=2-i$가 성립할 때, $2x+y$ 의 값은?

① 8　② 7　③ 5　④ 4　⑤ $\dfrac{9}{5}$

해설

$$\frac{(1-i)x+(1+i)y}{(1+i)(1-i)}=2-i$$

$$\frac{(x+y)-(x-y)i}{2}=2-i$$

$(x+y)-(x-y)i=4-2i$

복소수의 상등에 의해서

$x+y=4\cdots$㉠, $x-y=2\cdots$㉡

㉠, ㉡ 에서 $x=3,\ y=1\quad\therefore\ 2x+y=7$

16. z를 입력시키면 zi가 출력되는 컴퓨터 프로그램이 있다. 어떤 수를 이 프로그램에 입력시켜 나온 결과를 다시 프로그램에 입력시키는 과정을 100번 반복하니 2^{100}이 나왔다. 처음에 입력된 수는 무엇인가? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① $1+i$　② $1-i$　③ $2i$　④ 2　⑤ 2^{100}

해설

$z \to zi \to zi^2 \to zi^3 \to \cdots \to zi^{100}$

$\therefore zi^{100} = 2^{100}$

$\therefore z = 2^{100}$

17. 다음 중 그 값이 $i+i^2+i^3+\cdots+i^{114}$ 의 값과 같은 것은? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① $i+i^3+i^5+i^7+i^9+i^{11}$

② $i+i^4+i^7+i^{10}+i^{13}+i^{16}$

③ $i^2+i^5+i^8+i^{11}+i^{14}+i^{17}$

④ $i^3+i^6+i^9+i^{12}+i^{15}+i^{18}$

⑤ $\frac{1}{i}+\frac{1}{i}^2+\frac{1}{i}^3+\frac{1}{i}^4+\frac{1}{i}^5+\frac{1}{i}^6$

해설

i^n 의 주기성을 묻는 문제이다.

$i=i,\ i^2=-1,\ i^3=i^2i=-i,\ i^4=(i^2)^2=(-1)^2=1$

이므로 곱에 대하여 주기가 4 인 규칙을 지닌다.

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= (i+i^2+i^3+i^4)+(i^5+i^6+i^7+i^8)\\ &\quad +\cdots+(i^{109}+i^{110}+i^{111}+i^{112})+i^{113}+i^{114}\\ &= (i-1-i+1)+(i-1-i+1)\\ &\quad +\cdots+(i-1-i+1)+i-1\\ &= i-1\end{aligned}$$

① (준식) $=(i-i+i-i)+i-i=0$

② (준식) $=(i+1-i-1)+i+1=i+1$

③ (준식) $=(-1+i+1-i)-1+i=-1+i$

④ (준식) $=(-i-1+i+1)-i-1=-i-1$

⑤ (준식) $=(-i-1+i+1)-i-1=-i-1$

18. 정수 n에 대하여, $z = i^n + \dfrac{1}{i^n}$ 을 만족하는 실수의 개수는?

① 1개　② 2개　③ 3개　④ 4개　⑤ 5개

해설

$z = i^n + \dfrac{1}{i^n}$ 에서

$n = 1$ 일 때, $i + \dfrac{1}{i} = i - i = 0$

$n = 2$ 일 때, $-1 + \dfrac{1}{-1} = -1 - 1 = -2$

$n = 3$ 일 때, $-i + \dfrac{1}{-i} = 0$

$n = 4$ 일 때, $1 + \dfrac{1}{1} = 2$

따라서, $z = -2,\ 0,\ 2$ 이므로 3개이다.

19. $\alpha = 2+i$, $\beta = 1-2i$ 일 때, $\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 + \frac{1}{\alpha\beta} + \left(\frac{1}{\beta}\right)^2$ 의 값은? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① $\frac{4}{8} - \frac{3}{8}i$ ② $\frac{4}{8} \pm \frac{3}{8}i$ ③ $\frac{4}{25} - \frac{3}{25}i$
④ $\frac{4}{25} + \frac{3}{25}i$ ⑤ $\frac{4}{8} + \frac{3}{8}i$

해설

$\alpha = 2+i$, $\beta = 1-2i = -i(2+i) = -i\alpha$ 이므로 $\beta^2 = -\alpha^2$

$$\therefore \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} = \frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha^2} = 0$$

$$\begin{aligned}\therefore (\text{준식}) &= \frac{1}{\alpha\beta} \\ &= \frac{1}{(2+i)(1-2i)} \\ &= \frac{1}{4-3i} \\ &= \frac{4+3i}{25} \\ &= \frac{4}{25} + \frac{3}{25}i\end{aligned}$$

20. $x = 1 + \sqrt{2}i$, $y = 1 - \sqrt{2}i$ 일 때, $x^3 - y^3$ 의 값을 구하면?

① $2\sqrt{2}i$ ② $-2\sqrt{2}i$ ③ $\sqrt{2}i$
④ $-\sqrt{2}i$ ⑤ $2i$

해설

$x^3 - y^3 = (x-y)^3 + 3xy(x-y)$
$x - y = 2\sqrt{2}i$, $xy = (1+\sqrt{2}i)(1-\sqrt{2}i) = 3$

$$\begin{aligned} x^3 - y^3 &= (2\sqrt{2}i)^3 + 3 \cdot 3 \cdot (2\sqrt{2}i) \\ &= -16\sqrt{2}i + 18\sqrt{2}i \\ &= 2\sqrt{2}i \end{aligned}$$

21. $x=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}, y=\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$ 일 때, $\dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{x}$ 의 값을 구하면?

① 0 ② 1 ③ -2 ④ 3 ⑤ -4

해설

$$x+y=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}+\frac{1-\sqrt{3}i}{2}=1$$

$$xy=\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)\left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)=\frac{1-(-3)}{4}=1$$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}&=\frac{x^3+y^3}{xy}\\&=\frac{(x+y)^3-3xy(x+y)}{xy}\\&=-2\end{aligned}$$

22. $f(x)=\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{100}$ 일 때, $f\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)$ 의 값은?

① 1 ② $1-i$ ③ $1+i$ ④ -1 ⑤ 0

해설

$\dfrac{1+i}{1-i}=i$ 이므로

$$f\left(\frac{1+i}{1-i}\right)=f(i)=\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{100}=i^{100}=1$$

23. 자연수 n에 대하여 함수 $f(n)$과 다음과 같다고 하자.

$$f(n)\begin{cases} i^{n+1}(n=4k) \\ -i^{n}(n=4k+1)(\text{단,k는정수}) \\ 2i(n=4k+2) \\ -i(n=4k+3) \end{cases}$$

(단,k 는 정수) 이 때, $f(1)+f(2)+\cdot\cdot\cdot+f(2005)$ 를 구하면?

① i ② $-i$ ③ 0 ④ $500i$ ⑤ $501i$

해설

$n=4k \Rightarrow f(n)={}^{4k+1}=i$

$n=4k+1 \Rightarrow f(n)=-i^{4k+1}=-i$

$n=4k+2 \Rightarrow f(n)=2\pi$

$n=4k+3 \Rightarrow f(n)=-i$

$\therefore f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=-i+2i-i+i=i$

계속 반복되므로

$f(1)+f(2)+\cdots+f(2005)$

$=i\times 501+f(2005)$

$=501i-i=500i$

24. 정수 n에 대해 $z = i^n + i^{-n}, i = \sqrt{-1}$을 만족하는 z의 개수는?

① 1개　② 2개　③ 3개

④ 4개　⑤ 4개보다 많다.

해설

정수 n 에 대하여 $i^n = i$ 또는 -1 또는 $-i$ 또는 1,

$i^n = i$ 이면 $i^{-n} = -i$, $i^n = -1$ 이면

$i^{-n} = -1$, $i^n = -i$ 이면

$i^{-n} = i$, $i^n = 1$ 이면

$i^{-n} = 1$

$\therefore\ i^n + i^{-n} = 0, -2, 0, 2$

$\therefore\ z$는 3개다.