

1. 복소수 $z = (1+i)x^2 + (5+2i)x + 3(2-i)$ 에서 z 가 순허수일 때, 실수 x 의 값은? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① -3

② -2

③ -1

④ 0

⑤ 1

해설

$$\begin{aligned} z &= (x^2 + 5x + 6) + (x^2 + 2x - 3)i \\ &= (x+2)(x+3) + (x-1)(x+3)i \end{aligned}$$

순허수가 되려면 실수부=0, 허수부 $\neq$ 0
 $\therefore x = -2$

2. $(1+i)x^2 + 2(1+2i)x - 3 + 3i$ 가 순허수일 때, x 의 값은?

- ① 0 ② 1 ③ -3 ④ 1, 3 ⑤ -1

해설

$(1+i)x^2 + 2(1+2i)x - 3 + 3i$
 $= x^2 + x^2i + 2x + 4xi - 3 + 3i$
 $= (x^2 + 2x - 3) + (x^2 + 4x + 3)i$
순허수를 만족하려면 실수부=0, 허수부 $\neq 0$ 이어야 한다.
 $x^2 + 2x - 3 = 0$ 이면서, $x^2 + 4x + 3 \neq 0$ 인 x 값을 찾아야 한다.
 $\therefore x = 1$

3. 복소수 $z = (1+i)x + 1 - 2i$ 에 대하여 z^2 이 음의 실수일 때, 실수 x 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $x = -1$

해설

$$z = (1+i)x + 1 - 2i = (x+1) + (x-2)i$$

z^2 의 음의실수 $\Leftrightarrow z$ 가 순허수

$$\therefore x+1=0, \quad x=-1$$

4. 등식 $(x+yi)(z-i) = 10$ 을 만족하는 자연수 x, y, z 의 순서쌍 (x, y, z) 의 개수를 구하여라. (단, $i = \sqrt{-1}$)

▶ 답: 개

▶ 정답 : 3개

해설

$$(xz + y) + (yz - x)i = 10$$

$$xz + y = 10 \cdots \textcircled{7}, \quad yz - x = 0 \cdots \textcircled{8}$$

㉔을㉕에 대입

$$y(z^2 + 1) = 10$$

 z 를 기준으로 하여 순서쌍을 구해보면

(5, 5, 1), (4, 2, 2), (3, 1, 3) 3개

5. $\frac{a}{1-i} + \frac{b}{1+i} = 5$ 를 만족하는 두 실수 a, b 에 대하여 곱 ab 의 값을 구하면?

- ① 5 ② 10 ③ 15 ④ 20 ⑤ 25

해설

$$\frac{a(1+i)}{2} + \frac{b(1-i)}{2} = 5$$

$$a(1+i) + b(1-i) = 10,$$

$$(a+b) + (a-b)i = 10$$

$$a+b = 10, a-b = 0$$

$$2a = 10, a = 5, b = 5, ab = 25$$

6. 다음 등식을 만족시키는 실수 x, y 를 구할 때, x^2+y^2 의 값을 구하시오.

$$(1-2xi)(2-yi)=6-2i \text{ (단, } x>0 \text{)}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$$\begin{aligned}(2-2xy)-(4x+y)i&=6-2i \\ 2-2xy&=6, \ 4x+y=2 \\ \text{연립하여 } x \text{에 대해 정리하면} \\ 2x^2-x-1&=0 \\ (x-1)(2x+1)&=0 \\ \therefore x&=1(x>0), y=-2\end{aligned}$$

7. $f(x) = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{100}$ 일 때, $f\left(\frac{1+i}{1-i}\right)$ 의 값은?

- ① 1 ② $1-i$ ③ $1+i$ ④ -1 ⑤ 0

해설

$\frac{1+i}{1-i} = i$ 이므로

$$f\left(\frac{1+i}{1-i}\right) = f(i) = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{100} = i^{100} = 1$$

8. $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2008}$ 을 간단히 하면?

① -1

② 0

③ 1

④ i

⑤ $-i$

해설

$$\begin{aligned}\frac{1+i}{1-i} &= \frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} \\ &= \frac{2i}{2} = i \\ \therefore \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2008} &= i^{2008} \\ &= (i^4)^{502} = 1\end{aligned}$$

9. $A(n) = i^n + (-1)^n n$, $f(n) = A(1) + A(2) + \cdots + A(n)$ 이라 할 때, $f(10) + f(11) + f(12) + f(13)$ 의 값은? (단, n 은 자연수이고 $i = \sqrt{-1}$ 이다.)

- ① $2i - 2$
- ② $2i + 2$
- ③ $2i - 4$
- ④ $2i + 4$
- ⑤ $4i - 2$

해설

$$\begin{aligned} f(10) &= (i - 1) + (i^2 + 2) + (i^3 - 3) + \cdots + (i^{10} + 10) \\ &= (i + i^2 + i^3 + \cdots + i^{10}) \\ &\quad + (-1 + 2 - 3 + \cdots + 10) \\ &= (i - 1) + (1 + 1 + 1 + 1 + 1) \\ &= i + 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(11) &= f(10) + i^{11} - 11 \\ &= (i + 4) + (-i - 11) = -7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(12) &= f(11) + i^{12} + 12 \\ &= -7 + (1 + 12) = 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(13) &= f(12) + i^{13} - 13 \\ &= 6 + (i - 13) = i - 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore f(10) + f(11) + f(12) + f(13) \\ &= (i + 4) + (-7) + 6 + (i - 7) = 2i - 4 \end{aligned}$$

10. $z^2 = \sqrt{5} + i$ 를 만족하는 복소수 z 에 대하여 $z\bar{z}$ 의 값은? (단, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수)

- ① $\sqrt{2}$
- ② $\sqrt{3}$
- ③ 2
- ④ $\sqrt{5}$
- ⑤ $\sqrt{6}$

해설

$z = x + yi$ (x, y 는 실수)로 놓으면 $(x + yi)^2 = \sqrt{5} + i$
 $x^2 - y^2 + 2xyi = \sqrt{5} + i$ 에서 복소수가 서로 같을 조건에 의하여
 $x^2 - y^2 = \sqrt{5}, 2xy = 1$
 $z\bar{z} = (x + yi)(x - yi) = x^2 + y^2$ 이므로
 $(x^2 + y^2)^2 = (x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2 = (\sqrt{5})^2 + 4\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 6$
 $x^2 + y^2 > 0$ 이므로 $x^2 + y^2 = \sqrt{6}$
 $\therefore z\bar{z} = \sqrt{6}$

해설

$z^2 = \sqrt{5} + i, \bar{z}^2 = \sqrt{5} - i$
 $z^2\bar{z}^2 = (\sqrt{5} + i)(\sqrt{5} - i) = 6$
 $z\bar{z} = \pm\sqrt{6}$
 $z\bar{z} \geq 0$ 이므로 $z\bar{z} = \sqrt{6}$

11. 복소수 $w = 2 - i$ 에 대하여 $\frac{w}{w+1} + \frac{\bar{w}}{\bar{w}+1}$ 의 값은? (단, $\bar{w}$ 는 w 의 켤레복소수이다.)

- ① $\frac{3}{5}$ ② $\frac{7}{5}$ ③ 1 ④ $\frac{7}{10}$ ⑤ $\frac{9}{10}$

해설

$$\begin{aligned}\bar{w} &= 2 + i \\ \frac{w}{w+1} + \frac{\bar{w}}{\bar{w}+1} &= \frac{2-i}{3-i} + \frac{2+i}{3+i} \\ &= \frac{(2-i)(3+i) + (2+i)(3-i)}{(3-i)(3+i)} \\ &= \frac{14}{10} \\ &= \frac{7}{5}\end{aligned}$$

해설

$$\begin{aligned}\omega + \bar{\omega} &= 4, \omega\bar{\omega} = 5 \\ \frac{w}{w+1} + \frac{\bar{w}}{\bar{w}+1} &= \frac{2\omega\bar{\omega} + \omega + \bar{\omega}}{\omega\bar{\omega} + \omega + \bar{\omega} + 1} \\ &= \frac{10+4}{5+4+1} \\ &= \frac{7}{5}\end{aligned}$$

12. 두 실수 a, b 에 대하여 복소수 $z = a + bi$ 와 켤레복소수 $\bar{z} = a - bi$ 의 곱 $z\bar{z} = 5$ 일 때, $\frac{1}{2}\left(z + \frac{5}{z}\right)$ 를 간단히 하면?

- ① b ② $2b$ ③ 0 ④ $5a$ ⑤ a

해설

$$\begin{aligned} z\bar{z} &= 5, \quad \bar{z} = \frac{5}{z} \\ \therefore \frac{1}{2}\left(z + \frac{5}{z}\right) &= \frac{1}{2}(z + \bar{z}) = \frac{1}{2} \times 2a = a \end{aligned}$$