

1. 복소수 $z = (1+i)x^2 + (5+2i)x + 3(2-i)$ 에서 z 가 순허수일 때, 실수 x 의 값은? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① -3

② -2

③ -1

④ 0

⑤ 1

해설

$$z = (x^2 + 5x + 6) + (x^2 + 2x - 3)i$$

$$= (x+2)(x+3) + (x-1)(x+3)i$$

순허수가 되려면 실수부=0, 허수부 $\neq$ 0

$$\therefore x = -2$$

2. $(1+i)x^2 + 2(1+2i)x - 3 + 3i$ 가 순허수일 때, x 의 값은?

① 0

② 1

③ -3

④ 1, 3

⑤ -1

해설

$$(1+i)x^2 + 2(1+2i)x - 3 + 3i$$

$$= x^2 + x^2i + 2x + 4xi - 3 + 3i$$

$$= (x^2 + 2x - 3) + (x^2 + 4x + 3)i$$

순허수를 만족하려면 실수부=0, 허수부 $\neq 0$ 이어야 한다.

$x^2 + 2x - 3 = 0$ 이면서, $x^2 + 4x + 3 \neq 0$ 인 x 값을 찾아야 한다.

$$\therefore x = 1$$

3. 복소수 $z = (1 + i)x + 1 - 2i$ 에 대하여 z^2 이 음의 실수일 때, 실수 x 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $x = -1$

해설

$$z = (1 + i)x + 1 - 2i = (x + 1) + (x - 2)i$$

z^2 의 음의실수 $\Leftrightarrow z$ 가 순허수

$$\therefore x + 1 = 0, \quad x = -1$$

4. 등식 $(x + yi)(z - i) = 10$ 을 만족하는 자연수 x, y, z 의 순서쌍 (x, y, z) 의 개수를 구하여라. (단, $i = \sqrt{-1}$)

▶ 답: 개

▷ 정답: 3개

해설

$$(xz + y) + (yz - x)i = 10$$

$$xz + y = 10 \cdots \textcircled{㉠}, yz - x = 0 \cdots \textcircled{㉡}$$

㉡을㉠에 대입

$$y(z^2 + 1) = 10$$

z 를 기준으로 하여 순서쌍을 구해보면

$(5, 5, 1), (4, 2, 2), (3, 1, 3)$ 3개

5. $\frac{a}{1-i} + \frac{b}{1+i} = 5$ 를 만족하는 두 실수 a, b 에 대하여 곱 ab 의 값을 구하면?

① 5

② 10

③ 15

④ 20

⑤ 25

해설

$$\frac{a(1+i)}{2} + \frac{b(1-i)}{2} = 5$$

$$a(1+i) + b(1-i) = 10,$$

$$(a+b) + (a-b)i = 10$$

$$a+b = 10, a-b = 0$$

$$2a = 10, a = 5, b = 5, ab = 25$$

6. 다음 등식을 만족시키는 실수 x, y 를 구할 때, $x^2 + y^2$ 의 값을 구하시오.

$$(1 - 2xi)(2 - yi) = 6 - 2i \quad (\text{단, } x > 0)$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$$(2 - 2xy) - (4x + y)i = 6 - 2i$$

$$2 - 2xy = 6, \quad 4x + y = 2$$

연립하여 x 에 대해 정리하면

$$2x^2 - x - 1 = 0$$

$$(x - 1)(2x + 1) = 0$$

$$\therefore x = 1(x > 0), \quad y = -2$$

7. $f(x) = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{100}$ 일 때, $f\left(\frac{1+i}{1-i}\right)$ 의 값은?

① 1

② $1-i$

③ $1+i$

④ -1

⑤ 0

해설

$$\frac{1+i}{1-i} = i \text{ 이므로}$$

$$f\left(\frac{1+i}{1-i}\right) = f(i) = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{100} = i^{100} = 1$$

8. $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2008}$ 을 간단히 하면?

① -1

② 0

③ 1

④ i

⑤ $-i$

해설

$$\begin{aligned}\frac{1+i}{1-i} &= \frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} \\ &= \frac{2i}{2} = i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2008} &= i^{2008} \\ &= (i^4)^{502} = 1\end{aligned}$$

9. $A(n) = i^n + (-1)^n n$, $f(n) = A(1) + A(2) + \cdots + A(n)$ 이라 할 때, $f(10) + f(11) + f(12) + f(13)$ 의 값은? (단, n 은 자연수이고 $i = \sqrt{-1}$ 이다.)

① $2i - 2$

② $2i + 2$

③ $2i - 4$

④ $2i + 4$

⑤ $4i - 2$

해설

$$\begin{aligned} f(10) &= (i-1) + (i^2+2) + (i^3-3) + \cdots + (i^{10}+10) \\ &= (i+i^2+i^3+\cdots+i^{10}) \\ &\quad + (-1+2-3+\cdots+10) \\ &= (i-1) + (1+1+1+1+1) \\ &= i+4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(11) &= f(10) + i^{11} - 11 \\ &= (i+4) + (-i-11) = -7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(12) &= f(11) + i^{12} + 12 \\ &= -7 + (1+12) = 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(13) &= f(12) + i^{13} - 13 \\ &= 6 + (i-13) = i-7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore f(10) + f(11) + f(12) + f(13) \\ &= (i+4) + (-7) + 6 + (i-7) = 2i-4 \end{aligned}$$

10. $z^2 = \sqrt{5} + i$ 를 만족하는 복소수 z 에 대하여 $z\bar{z}$ 의 값은? (단, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수)

① $\sqrt{2}$

② $\sqrt{3}$

③ 2

④ $\sqrt{5}$

⑤ $\sqrt{6}$

해설

$$\begin{aligned} z &= x + yi \quad (x, y \text{ 는 실수}) \text{로 놓으면 } (x + yi)^2 = \sqrt{5} + i \\ x^2 - y^2 + 2xyi &= \sqrt{5} + i \text{ 에서 복소수가 서로 같을 조건에 의하여} \\ x^2 - y^2 &= \sqrt{5}, \quad 2xy = 1 \\ z\bar{z} &= (x + yi)(x - yi) = x^2 + y^2 \text{ 이므로} \end{aligned}$$

$$(x^2 + y^2)^2 = (x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2 = (\sqrt{5})^2 + 4\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 6$$

$$x^2 + y^2 > 0 \text{ 이므로 } x^2 + y^2 = \sqrt{6}$$

$$\therefore z\bar{z} = \sqrt{6}$$

해설

$$\begin{aligned} z^2 &= \sqrt{5} + i, \quad \bar{z}^2 = \sqrt{5} - i \\ z^2\bar{z}^2 &= (\sqrt{5} + i)(\sqrt{5} - i) = 6 \\ z\bar{z} &= \pm\sqrt{6} \\ z\bar{z} &\geq 0 \text{ 이므로 } z\bar{z} = \sqrt{6} \end{aligned}$$

11. 복소수 $w = 2 - i$ 에 대하여 $\frac{w}{w+1} + \frac{\bar{w}}{\bar{w}+1}$ 의 값은? (단, $\bar{w}$ 는 w 의 켤레복소수이다.)

① $\frac{3}{5}$

② $\frac{7}{5}$

③ 1

④ $\frac{7}{10}$

⑤ $\frac{9}{10}$

해설

$$\bar{w} = 2 + i$$

$$\begin{aligned}\frac{w}{w+1} + \frac{\bar{w}}{\bar{w}+1} &= \frac{2-i}{3-i} + \frac{2+i}{3+i} \\ &= \frac{(2-i)(3+i) + (2+i)(3-i)}{(3-i)(3+i)} \\ &= \frac{14}{10} \\ &= \frac{7}{5}\end{aligned}$$

해설

$$\omega + \bar{\omega} = 4, \omega\bar{\omega} = 5$$

$$\begin{aligned}\frac{w}{w+1} + \frac{\bar{w}}{\bar{w}+1} &= \frac{2\omega\bar{\omega} + \omega + \bar{\omega}}{\omega\bar{\omega} + \omega + \bar{\omega} + 1} \\ &= \frac{5 + 4 + 1}{7} \\ &= \frac{10}{7}\end{aligned}$$

12. 두 실수 a, b 에 대하여 복소수 $z = a + bi$ 와 켤레복소수 $\bar{z} = a - bi$ 의 곱 $z\bar{z} = 5$ 일 때, $\frac{1}{2} \left(z + \frac{5}{z} \right)$ 를 간단히 하면?

① b

② $2b$

③ 0

④ $5a$

⑤ a

해설

$$z\bar{z} = 5, \quad \bar{z} = \frac{5}{z}$$

$$\therefore \frac{1}{2} \left(z + \frac{5}{z} \right) = \frac{1}{2} (z + \bar{z}) = \frac{1}{2} \times 2a = a$$