1. x^2+ax-9와 x^2+bx+c의 합은 $2x^2-4x-6$, 최소공배수는 x^3-x^2-9x+9이다. $a-b+c$의 값을 구하여라. (단, a, b, c는 상수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$A = x^2 + ax - 9 = Gp$
$B = x^2 + bx + c = Gq$라 하면
$A + B = (p+q)G = 2x^2 - 4x - 6 = 2(x+1)(x-3)$
$L = pqG = x^3 - x^2 - 9x + 9 = x^2(x-1) - 9(x-1)$
$= (x-1)(x^2-9) = (x-1)(x+3)(x-3)$
따라서, $G = x-3$, $p = x+3$, $q = x-1$이다.
$\therefore\ A = (x+3)(x-3) = x^2 - 9$
$B = (x-1)(x-3) = x^2 - 4x + 3$
$\therefore\ a = 0,\ b = -4,\ c = 3$
$\therefore\ a - b + c = 7$

2. 두 이차다항식의 최대공약수가 $x-2$ 이고, 최소공배수가 $x^3-6x^2+3x+10$ 일 때, 두 다항식의 합을 구하면? (단, 이차항의 계수는 모두 1 이다.)

① $2x^2-6x+8$ ② $2x^2-6x+7$ ③ $2x^2-8x+8$
④ $2x^2-9x+10$ ⑤ $2x^2+6x+9$

해설

구하는 두 다항식의 최대공약수가 $x-2$ 이므로
두 다항식은 $(x-2)a, (x-2)b$ (a, b는 서로소)
최소공배수 $(x-2)ab = x^3-6x^2+3x+10$
$= (x-2)(x+1)(x-5)$
그러므로 $a = x-5, b = x+1$
또는 $a = x+1, b = x-5$
따라서 두 다항식은
$(x-2)(x-5) = x^2-7x+10$,
$(x-2)(x+1) = x^2-x-2$
$\therefore$ 두 다항식의 합은 $2x^2-8x+8$

3. 이차항의 계수가 1 인 두 다항식 A, B 의 최대공약수가 $x+1$ 이고, 최소공배수가 x^3-3x-2 일 때, $A+B$ 를 구하면?

① $(x-1)(x+1)$
② $(x-1)(2x+1)$
③ $(x-1)(2x-1)$
④ $(x+1)(2x-1)$
⑤ $(x+1)(2x+1)$

해설

$A=Ga,\quad B=Gb$(a , b는서로소), $\quad L=Gab$

$L=x^3-3x-2=(x+1)(x^2-x-2)$

$\quad =(x+1)(x-2)(x+1)$

$A+B=(x+1)(x+1)+(x+1)(x-2)$

$\qquad =(x+1)(x+1+x-2)=(x+1)(2x-1)$

4. 두 다항식 x^2-3x+a와 x^2+bx-6의 최대공약수가 $x-1$일 때, 두 다항식의 최소공배수를 $f(x)$라 하자. 이 때, $f(x)$를 $x-2$로 나눈 나머지를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

x^2-3x+a, x^2+bx-6은

$(x-1)$을 인수로 가지므로 $a=2, b=5$

$\therefore\ x^2-3x+2=(x-2)(x-1)$

$x^2+5x-6=(x+6)(x-1)$

$f(x)=(x-1)(x-2)(x+6)$

$f(x)$를 $x-2$로 나눈 나머지 $f(2)=0$

5. 두 다항식 $x^2+4x+2k$ 와 x^2+3x+k 의 최대공약수가 x 에 대한 일차식일 때, 상수 k 값들의 합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 2

해설

$A=x^2+4x+2k$, $B=x^2+3x+k$ 라고 하면 $A-B=x+k$
$A-B$ 는 최대공약수 G 를 인수로 갖고,
주어진 조건에서 두 식의 최대공약수가 일차식이므로
두 식의 최대공약수는 $x+k$ 이다.
A, B 는 최대공약수 $x+k$ 를 인수로 가지므로
A 에 $x=-k$ 를 대입하면
$k^2-2k=0$, $k(k-2)=0$
$\therefore\ k=0$ 또는 $k=2$
따라서, k 값들의 합은 2 이다.

6. 두 다항식 $2x^3 + (a-2)x^2 + ax - 2a$, $x^3 + 2x^2 - x - 2$의 최대공약수가 이차식이 되도록 상수 a의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = -2$

해설

$x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x-1)(x+1)(x+2)$

$f(x) = 2x^3 + (a-2)x^2 + ax - 2a$라 하면

$f(1) = 0$이므로 $f(x)$ 는 $x - 1$을 인수로 갖는다.

최대공약수가 이차식이므로 $f(x)$는 $x+1$

또는 $x+2$를 인수로 가져야 한다.

$f(-2) = -8 - 4a - 8 - 4a \neq 0$이므로

$x+1$이 인수이다.

$\therefore\ f(-1) = 0$일 때 $a = -2$

7. x^4-11x^2+1 이 $(x^2+ax+b)(x^2+3x+b)$로 인수분해될 때, $a+b$의 값은?

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

해설

$$\begin{aligned} x^4-11x^2+1 &= (x^2-1)^2-9x^2 \\ &= (x^2-1)^2-(3x)^2 \\ &= (x^2-3x-1)(x^2+3x-1) \\ &= (x^2+ax+b)(x^2+3x+b) \end{aligned}$$

$\therefore\ a=-3,\ b=-1$

$\therefore\ a+b=-4$

8. $a^2 - b^2 = 1$일 때, $\{(a+b)^n + (a-b)^n\}^2 - \{(a+b)^n - (a-b)^n\}^2$의 값은? (단, n은 자연수)

① 2　　② $2(a+b)^n$　　③ 4

④ $4(a+b)^n$　　⑤ $4(a-b)^n$

해설

$(A)^2 - (B)^2$ 형태이므로
합차공식을 사용하여 정리하면
(준식)$= 4(a+b)^n(a-b)^n = 4(a^2-b^2)^n = 4$

9. x^4-6x^2+1을 인수분해 하였더니 $(x^2+ax+b)(x^2+cx+d)$가 되었다. 이 때, $a+b+c+d$의 값을 구하면?

① -2　② 2　③ -1　④ 1　⑤ 4

해설

$x^4-6x^2+1=(x^4-2x^2+1)-4x^2$
$=(x^2-1)^2-(2x)^2$
$=(x^2+2x-1)(x^2-2x-1)$
$=(x^2+ax+b)(x^2+cx+d)$
$\therefore\ a+b+c+d=-2$

10. $198^3+200^3+202^3-3\cdot198\cdot200\cdot202$를 간단히 하면?

① 6800 ② 7000 ③ 7200 ④ 7400 ⑤ 7600

해설

$198=x, 200=y, 202=z$라 하면

$198^3+200^3+202^3-3\cdot198\cdot200\cdot202$

$=x^3+y^3+z^3-3xyz$

$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$

$=\dfrac{1}{2}(x+y+z)\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\}$

$=\dfrac{1}{2}\times600\times24$

$=7200$

11. $x^4 + 4y^4 = (x^2 - 2xy + 2y^2)(x^2 + 2xy + 2y^2)$을 이용하여 다음 식의 값을 구하면?

$$\frac{(11^4 + 324)(23^4 + 324)(35^4 + 324)(47^4 + 324)}{(5^4 + 324)(17^4 + 324)(29^4 + 324)(41^4 + 324)}$$

① 192 ② 193 ③ 194 ④ 195 ⑤ 196

해설

$x^4 + 4y^4 = (x^2 - 2xy + 2y^2)(x^2 + 2xy + 2y^2)$

$= \{(x-y)^2 + y^2\}\{(x+y)^2 + y^2\}$ 이고,

$324 = 4 \times 3^4$ 이므로

$11^4 + 324 = (11^2 - 2 \times 11 \times 3 + 2 \times 3^2)(11^2 + 2 \times 11 \times 3 + 2 \times 3^2)$

$= \{(11-3)^2 + 3^2\}\{(11+3)^2 + 3^2\}$

$= (8^2 + 3^2)(14^2 + 3^2)$

따라서 차례대로 모두 정리해 보면 주어진 식은

$$\frac{\{(8^2 + 3^2)(14^2 + 3^2)\}\{(20^2 + 3^2)(26^2 + 3^2)\}}{\{(2^2 + 3^2)(8^2 + 3^2)\}\{(14^2 + 3^2)(20^2 + 3^2)\}}$$

$$\frac{\{(32^2 + 3^2)(38^2 + 3^2)\}\{(44^2 + 3^2)(50^2 + 3^2)\}}{\{(26^2 + 3^2)(32^2 + 3^2)\}\{(38^2 + 3^2)(44^2 + 3^2)\}}$$

$$= \frac{50^2 + 3^2}{2^2 + 3^2} = \frac{2509}{13} = 193$$

12. $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - \cdots + 99^2$ 을 계산하여라.

① 99 ② 100 ③ 4950

④ 5050 ⑤ 10000

해설

$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - \cdots + 99^2$
$= 99^2 - 98^2 + 97^2 - 96^2 + \cdots + 3^2 - 2^2 + 1^2$
$= (99^2 - 98^2) + (97^2 - 96^2) +$
$\cdots + (3^2 - 2^2) + 1^2$
$= (99-98)(99+98) + (97-96)(97+96) + \cdots + (3-2)(3+2) + 1$
$= (99 + 98) + (97 + 96) + \cdots + (3 + 2) + 1$
$= 1 + 2 + 3 + \cdots + 99$
$= (1 + 99) + (2 + 98) + \cdots + (49 + 51) + 50$
$= 4950$

13. 세 실수 a, b, c 사이에 $a^2 - bc = b^2 - ac = c^2 - ab$ 인 관계가 성립할 때, $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ 의 값은?

① 0　　② 1　　③ 0, 2
④ 0, 1　　⑤ 0, 1, 2

해설

$a^2 - bc = b^2 - ac$ 에서 $(a^2 - b^2) + (ac - bc) = 0$
$\therefore\ (a+b+c)(a-b) = 0 \cdots$ ㉠
$b^2 - ac = c^2 - ab$ 에서 $(b^2 - c^2) + (ab - ac) = 0$
$\therefore\ (a+b+c)(b-c) = 0 \cdots$ ㉡
㉠, ㉡에서 $a + b + c = 0$ 또는 $a = b = c$
한편 $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$
$= (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$ 이므로
ⅰ) $a + b + c = 0$ 일 때 $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0$
ⅱ) $a = b = c$ 일 때
(준식)$= 3a^3 - 3a^3 = 0$
따라서 $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0$

14. 다음 중 $\left(\dfrac{997}{1000}\right)^3 + \left(\dfrac{3}{1000}\right)^3 - 1$ 의 값과 같은 것은?

① $\dfrac{3^2 \times 997^3}{10}$ ② $\dfrac{3^2 \times 997^6}{10}$ ③ $-\dfrac{3^2 \times 997^3}{10}$

④ $-\dfrac{3^2 \times 997}{10^6}$ ⑤ $-\dfrac{3^2 \times 997^9}{10}$

해설

주어진 식에서 $\dfrac{997}{1000}$ 과 $\dfrac{3}{1000}$ 을 더해보면 $\dfrac{997+3}{1000} = 1$ 이므로

$a = \dfrac{997}{1000}$, $b = \dfrac{3}{100}$, $c = -1$ 이라 하면

$a+b+c=0$ 이 된다.

따라서 $a+b+c=0$ 이므로

$a^3+b^3+c^3-3abc$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$ 에서 $a^3+b^3+c^3=3abc$

임을 이용하면

$a^3+b^3+c^3 = \left(\dfrac{997}{1000}\right)^3 + \left(\dfrac{3}{1000}\right)^3 + (-1)^3$ 의 값은

$3abc = 3 \times \dfrac{997}{1000} \times \dfrac{3}{1000} \times (-1)$ 와 같으므로

구하는 값은

$3 \times \dfrac{997}{1000} \times \dfrac{3}{1000} \times (-1) = -\dfrac{3^2 \times 997}{10^6}$

15. $a+b+c=0$, $abc \neq 0$ 일 때, $\frac{a^2+b^2+c^2}{a^3+b^3+c^3}+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$a^3+b^3+c^3-3abc$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$=0(\because\ a+b+c=0\ )$

$\therefore\ a^3+b^3+c^3=3abc$

$\therefore$(준식) $=\frac{a^2+b^2+c^2}{3abc}+\frac{2}{3}\left(\frac{bc+ca+ab}{abc}\right)$

$=\frac{(a+b+c)^2}{3abc}=0$

16. $p(x) = x^2 + bx + c$ (b, c 는 정수)가 $x^4 + 6x^2 + 25$ 와 $3x^4 + 4x^2 + 28x + 5$ 의 공약수일 때, $p(1)$ 은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 4 ⑤ 8

해설

$A = Ga$, $B = Gb$ 일 때 (a, b는 서로소)

$kA - B = Gka - Gb$ (k는 상수)

$\quad = G(ka - b)$ 이므로

G는 $kA - B$의 약수이다.

$3(x^4 + 6x^2 + 25) - (3x^4 + 4x^2 + 28x + 5)$

$= 14x^2 - 28x + 70$

$= 14(x^2 - 2x + 5)$,

$p(x) = x^2 - 2x + 5$

$\therefore\ p(1) = 4$

17. x 에 관한 두 다항식 $f(x) = x^3 + ax^2 + 2x - 1,\ g(x) = x^3 + bx^2 + 1$ 이 이차식의 최대공약수 $h(x)$ 를 가질 때, $h(-1)$ 의 값을 구하면? (단, $h(x)$ 의 이차항의 계수는 1이다.)

① 6 ② 3 ③ 0 ④ −3 ⑤ −6

해설

$f(x) + g(x) = x\{2x^2 + (a+b)x + 2\} = G(k+l)$

$f(x) - g(x) = (a-b)x^2 + 2x - 2 = G(k-l)$ (단, k, l : 서로소)

$\therefore\ -2x^2 - (a+b)x - 2 = (a-b)x^2 + 2x - 2$

$a - b = -2,\ a + b = -2$

$\therefore\ a = -2,\ b = 0$

$\therefore\ h(x) = x^2 - x + 1 \quad \therefore\ h(-1) = 3$

18. 두 다항식 $x^3+x^2+x+3+m$, x^2-x+m이 서로소가 아닐 때, 상수 m의 값을 구하면?

① -1, 2　② -2, 3　③ -1, 2　④ -1, 3　⑤ -2, 2

해설

서로소가 아니라는 것은 일차이상의 공약수가 존재한다는 뜻이다.

$f(x)=x^3+x^2+x+3+m \cdots$ ㉠

$g(x)=x^2-x+m \cdots$ ㉡

으로 놓으면

$f(x)-g(x)=x^3+2x+3=(x+1)(x^2-x+3)$

㉠과 ㉡이 서로소가 아니므로 ㉠과 ㉡의 최대공약수는

$x+1$ 또는 x^2-x+3이다.

(i) $x+1$이 최대공약수일 때, $m=-2$

(ii) x^2-x+3이 최대공약수일 때, 이 식과 $g(x)$는 서로 같아야 하므로 $m=3$

(i), (ii)에서 $m=-2$ 또는 3