

1. x^2+ax-9 와 x^2+bx+c 의 합은 $2x^2-4x-6$, 최소공배수는 x^3-x^2-9x+9 이다. $a-b+c$ 의 값을 구하여라. (단, a, b, c 는 상수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$$\begin{aligned} A &= x^2 + ax - 9 = Gp \\ B &= x^2 + bx + c = Gq \text{라 하면} \\ A + B &= (p + q)G = 2x^2 - 4x - 6 = 2(x + 1)(x - 3) \\ L = pqG &= x^3 - x^2 - 9x + 9 = x^2(x - 1) - 9(x - 1) \\ &= (x - 1)(x^2 - 9) = (x - 1)(x + 3)(x - 3) \\ \text{따라서, } G &= x - 3, p = x + 3, q = x - 1 \text{ 이다.} \\ \therefore A &= (x + 3)(x - 3) = x^2 - 9 \\ B &= (x - 1)(x - 3) = x^2 - 4x + 3 \\ \therefore a &= 0, b = -4, c = 3 \\ \therefore a - b + c &= 7 \end{aligned}$$

2. 이차항의 계수가 1인 두 이차식의 최대공약수가 $x-2$, 최소공배수가 x^3-7x+6 일 때, 두 이차식의 합은?

- ① $2x^2-2x-4$ ② $2x^2-7x+4$ ③ $2x^2+3x+6$
④ $2x^2-5x-4$ ⑤ $2x^2+6x+4$

해설

두 이차식을 A, B 라 하고

$A = (x-2)a, B = (x-2)b$ 라 하자.

$L = x^3 - 7x + 6 = (x-2)(x+3)(x-1)$ 이므로

$A = (x-2)(x+3), B = (x-2)(x-1)$ 로 볼 수 있다.

$\therefore A + B = 2x^2 - 2x - 4$

3. 이차항의 계수가 1인 두 이차 다항식의 최대공약수가 $x + 2$ 이고, 최소공배수가 $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ 일 때, 두 다항식의 합은?

① $2(x + 2)(x - 1)$

② $2(x + 2)(x - 2)$

③ $(x + 2)(x - 2)$

④ $2(x + 1)(x - 1)$

⑤ $(x + 1)(x - 1)$

해설

$$L = (x - 1)(x - 3)(x + 2)$$

두 다항식은 $(x - 1)(x + 2)$, $(x - 3)(x + 2)$

두 다항식의 합은 $2(x + 2)(x - 2)$

4. 두 다항식 $x^2 - 3x + a$ 와 $x^2 + bx - 6$ 의 최대공약수가 $x - 1$ 일 때, 두 다항식의 최소공배수를 $f(x)$ 라 하자. 이 때, $f(x)$ 를 $x - 2$ 로 나눈 나머지를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$x^2 - 3x + a, x^2 + bx - 6$ 은
($x - 1$)을 인수로 가지므로 $a = 2, b = 5$
 $\therefore x^2 - 3x + 2 = (x - 2)(x - 1)$
 $x^2 + 5x - 6 = (x + 6)(x - 1)$
 $f(x) = (x - 1)(x - 2)(x + 6)$
 $f(x)$ 를 $x - 2$ 로 나눈 나머지 $f(2) = 0$

5. 두 다항식 $A = x^3 + x^2 + ax - 2$, $B = x^3 - x^2 - ax + 4$ 의 최대공약수가 일차식일 때, 상수 a 의 값은?

① 2 ② 1 ③ 0 ④ -1 ⑤ -2

해설

최대공약수를 $x - \alpha$ 라 하자.
나머지정리에 의해 $\alpha^3 + \alpha^2 + a\alpha - 2 = 0$
 $\alpha^3 - \alpha^2 - a\alpha + 4 = 0$
두 식을 더하면 $2\alpha^3 = -2$, $\alpha = -1$
이제 $\alpha = -1$ 을 다시 A 식에 대입하면
 $-1 + (-1)^2 - a - 2 = 0 \quad \therefore a = -2$

6. 두 다항식 $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ 과 $3x^3 + (a-9)x^2 - ax - 6a$ 의 최대공약수가 이차식일 때, a 의 값은?

① 1 ② -1 ③ 2 ④ -2 ⑤ 3

해설

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x-1)(x-3)(x+2)$$

$$3x^3 + (a-9)x^2 - ax - 6a \text{에}$$

$$x=3 \text{ 대입, } 81+9a-81-3a-6a=0$$

$$x=-2 \text{ 대입, } -24+4a-36+2a-6a \neq 0 \text{ 이므로}$$

$$x-1 \text{ 을 인수로 가져야 한다.}$$

$$x=1 \text{ 대입 } 3+a-9-a-6a=0, a=-1$$

7. $x^4 - 11x^2 + 1$ 이 $(x^2 + ax + b)(x^2 + 3x + b)$ 로 인수분해될 때, $a + b$ 의 값은?

① -1

② -2

③ -3

④ -4

⑤ -5

해설

$$\begin{aligned}x^4 - 11x^2 + 1 &= (x^2 - 1)^2 - 9x^2 \\&= (x^2 - 1)^2 - (3x)^2 \\&= (x^2 - 3x - 1)(x^2 + 3x - 1) \\&= (x^2 + ax + b)(x^2 + 3x + b)\end{aligned}$$

$$\therefore a = -3, b = -1$$

$$\therefore a + b = -4$$

8. $x^4 + 3x^2 + 4$ 를 바르게 인수분해한 것은?

① $(x^2 + x + 1)(x^2 - 2x + 1)$ ② $(x^2 + 2x + 2)(x^2 - x + 2)$

③ $(x^2 - x + 2)(x^2 + x + 2)$ ④ $(x^2 + x - 1)(x^2 - 2x + 1)$

⑤ $(x^2 + x - 2)(x^2 + x + 2)$

해설

$$\begin{aligned}x^4 + 3x^2 + 4 &= (x^4 + 4x^2 + 4) - x^2 \\&= (x^2 + 2)^2 - x^2 \\&= (x^2 + x + 2)(x^2 - x + 2)\end{aligned}$$

9. $x^4 - 6x^2 + 1$ 을 인수분해 하였더니 $(x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d)$ 가 되었다.
이 때, $a + b + c + d$ 의 값을 구하면?

① -2 ② 2 ③ -1 ④ 1 ⑤ 4

해설

$$\begin{aligned}x^4 - 6x^2 + 1 &= (x^4 - 2x^2 + 1) - 4x^2 \\&= (x^2 - 1)^2 - (2x)^2 \\&= (x^2 + 2x - 1)(x^2 - 2x - 1) \\&= (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d) \\ \therefore a + b + c + d &= -2\end{aligned}$$

10. $198^3 + 200^3 + 202^3 - 3 \cdot 198 \cdot 200 \cdot 202$ 를 간단히 하면?

- ① 6800 ② 7000 ③ 7200 ④ 7400 ⑤ 7600

해설

$$\begin{aligned} &198 = x, 200 = y, 202 = z \text{라 하면} \\ &198^3 + 200^3 + 202^3 - 3 \cdot 198 \cdot 200 \cdot 202 \\ &= x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \\ &= (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) \\ &= \frac{1}{2}(x + y + z)\{(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2\} \\ &= \frac{1}{2} \times 600 \times 24 \\ &= 7200 \end{aligned}$$

11. $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - \dots + 99^2$ 을 계산하여라.

- ① 99
- ② 100
- ③

4950
- ④ 5050
- ⑤ 10000

해설

$$\begin{aligned} &1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - \dots + 99^2 \\ &= 99^2 - 98^2 + 97^2 - 96^2 + \dots + 3^2 - 2^2 + 1^2 \\ &= (99^2 - 98^2) + (97^2 - 96^2) + \\ &\quad \dots + (3^2 - 2^2) + 1^2 \\ &= (99 - 98)(99 + 98) + (97 - 96)(97 + 96) + \dots + (3 - 2)(3 + 2) + 1 \\ &= (99 + 98) + (97 + 96) + \dots + (3 + 2) + 1 \\ &= 1 + 2 + 3 + \dots + 99 \\ &= (1 + 99) + (2 + 98) + \dots + (49 + 51) + 50 \\ &= 4950 \end{aligned}$$

12. 인수분해 공식 $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ 을 이용하여 $\frac{9999^3 + 1}{9998 \times 9999 + 1}$ 을 계산하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10000

해설

9999 = a 라 하면

$$\begin{aligned}\frac{9999^3 + 1}{9998 \times 9999 + 1} &= \frac{a^3 + 1}{(a - 1)a + 1} \\ &= \frac{(a + 1)(a^2 - a + 1)}{a^2 - a + 1} \\ &= a + 1 = 10000\end{aligned}$$

13. 세 실수 a, b, c 사이에 $a^2 - bc = b^2 - ac = c^2 - ab$ 인 관계가 성립할 때, $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ 의 값은?

- ① 0 ② 1 ③ 0, 2
④ 0, 1 ⑤ 0, 1, 2

해설

$$a^2 - bc = b^2 - ac \text{ 에서 } (a^2 - b^2) + (ac - bc) = 0$$

$$\therefore (a + b + c)(a - b) = 0 \cdots \textcircled{1}$$

$$b^2 - ac = c^2 - ab \text{ 에서 } (b^2 - c^2) + (ab - ac) = 0$$

$$\therefore (a + b + c)(b - c) = 0 \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ 에서 } a + b + c = 0 \text{ 또는 } a = b = c$$

$$\text{한편 } a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$$

$$= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) \text{ 이므로}$$

$$\text{i) } a + b + c = 0 \text{ 일 때 } a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0$$

$$\text{ii) } a = b = c \text{ 일 때}$$

$$(\text{준식}) = 3a^3 - 3a^3 = 0$$

$$\text{따라서 } a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0$$

14. $a+b+c=0$, $abc \neq 0$ 일 때, $\frac{a^2+b^2+c^2}{a^3+b^3+c^3} + \frac{2}{3} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$$\begin{aligned} & a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \\ &= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) \\ &= 0 (\because a+b+c=0) \\ \therefore a^3 + b^3 + c^3 &= 3abc \\ \therefore (\text{준식}) &= \frac{a^2+b^2+c^2}{3abc} + \frac{2}{3} \left(\frac{bc+ca+ab}{abc} \right) \\ &= \frac{(a+b+c)^2}{3abc} = 0 \end{aligned}$$

15. 다음 중 $\left(\frac{997}{1000}\right)^3 + \left(\frac{3}{1000}\right)^3 - 1$ 의 값과 같은 것은?

- ① $\frac{3^2 \times 997^3}{10}$ ② $\frac{3^2 \times 997^6}{10}$ ③ $-\frac{3^2 \times 997^3}{10}$
 ④ $-\frac{3^2 \times 997}{10^6}$ ⑤ $-\frac{3^2 \times 997^9}{10}$

해설

주어진 식에서 $\frac{997}{1000}$ 과 $\frac{3}{1000}$ 을 더해보면 $\frac{997+3}{1000} = 1$ 이므로

$a = \frac{997}{1000}$, $b = \frac{3}{1000}$, $c = -1$ 이라 하면

$a + b + c = 0$ 이 된다.

따라서 $a + b + c = 0$ 이므로

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$$

$$= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) \text{ 에서 } a^3+b^3+c^3 = 3abc$$

임을 이용하면

$$a^3 + b^3 + c^3 = \left(\frac{997}{1000}\right)^3 + \left(\frac{3}{1000}\right)^3 + (-1)^3 \text{ 의 값은}$$

$$3abc = 3 \times \frac{997}{1000} \times \frac{3}{1000} \times (-1) \text{ 와 같으므로}$$

구하는 값은

$$3 \times \frac{997}{1000} \times \frac{3}{1000} \times (-1) = -\frac{3^2 \times 997}{10^6}$$

16. $p(x) = x^2 + bx + c$ (b, c 는 정수)가 $x^4 + 6x^2 + 25$ 와 $3x^4 + 4x^2 + 28x + 5$ 의 공약수일 때, $p(1)$ 은?

- ① 0
- ② 1
- ③ 2
- ④ 4
- ⑤ 8

해설

$A = Ga, B = Gb$ 일 때 (a, b 는 서로소)

$kA - B = Gka - Gb$ (k 는 상수)

$= G(ka - b)$ 이므로

G 는 $kA - B$ 의 약수이다.

$3(x^4 + 6x^2 + 25) - (3x^4 + 4x^2 + 28x + 5)$

$= 14x^2 - 28x + 70$

$= 14(x^2 - 2x + 5),$

$p(x) = x^2 - 2x + 5$

$\therefore p(1) = 4$

17. x 에 관한 두 삼차식 $P = x^3 + ax^2 + 2x - 1$, $Q = x^3 + bx^2 + 1$ 이 이차식의 최대공약수를 가질 때, $2a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -4

해설

$$P - Q = (a - b)x^2 + 2x - 2 \cdots \textcircled{A}$$

$$P + Q = x\{2x^2 + (a + b)x + 2\} \cdots \textcircled{B}$$

P , Q 의 최대공약수를 G 라 하면,

G 는 $P - Q$ 와 $P + Q$ 의 공약수이다.

그런데 G 는 이차이고, P , Q 에는

x 라는 약수가 없으므로 $\textcircled{A}$, $\textcircled{B}$ 에서 G 는

$(a - b)x^2 + 2x - 2$ 이고 $2x^2 + (a + b)x + 2$ 이다.

$$\therefore a - b = -2, a + b = -2$$

$$\therefore a = -2, b = 0$$

$$\therefore 2a + b = -4$$

18. 두 다항식 $x^2 + ax + bc$ 와 $x^2 + bx + ca$ 가 일차의 최대공약수를 가질 때, 최소공배수를 구하면?

- ① $(x-a)(x-b)(x-c)$ ② $(a-x)(b-x)(c-x)$
③ $(x-a)^2(x-b)(x-c)$ ④ $(x-a)(x-b)^2(x-c)$
⑤ $(x-a)(x-b)(x-c)^2$

해설

일차의 최대공약수를 $x-p$ 라 하면

$$p^2 + ap + bc = 0 \cdots \textcircled{㉠}$$

$$p^2 + bp + ca = 0 \cdots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠}-\textcircled{㉡}\text{에서 } (a-b)p - c(a-b) = (a-b)(p-c) = 0$$

일차의 최대공약수를 가지므로

$a \neq b$, $p = c$ 이고 최대공약수는 $x-c$

상수항을 기준으로 인수분해하면 각각

$$x^2 + ax + bc = (x-c)(x-b)$$

$$x^2 + bx + ca = (x-c)(x-a)$$

$$\therefore \text{최소공배수는 } (x-a)(x-b)(x-c)$$