1. x^2+ax-9와 x^2+bx+c의 합은 $2x^2-4x-6$, 최소공배수는 x^3-x^2-9x+9이다. $a-b+c$의 값을 구하여라. (단, a, b, c는 상수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$A=x^2+ax-9=Gp$

$B=x^2+bx+c=Gq$라 하면

$A+B=(p+q)G=2x^2-4x-6=2(x+1)(x-3)$

$L=pqG=x^3-x^2-9x+9=x^2(x-1)-9(x-1)$

$=(x-1)(x^2-9)=(x-1)(x+3)(x-3)$

따라서, $G=x-3$, $p=x+3$, $q=x-1$이다.

$\therefore\ A=(x+3)(x-3)=x^2-9$

$\quad B=(x-1)(x-3)=x^2-4x+3$

$\therefore\ a=0,\ b=-4,\ c=3$

$\therefore\ a-b+c=7$

2. 이차항의 계수가 1 인 두 이차식의 최대공약수가 $x-2$, 최소공배수가 x^3-7x+6일 때, 두 이차식의 합은?

① $2x^2-2x-4$ ② $2x^2-7x+4$ ③ $2x^2+3x+6$

④ $2x^2-5x-4$ ⑤ $2x^2+6x+4$

해설

두 이차식을 A, B라 하고

$A=(x-2)a, B=(x-2)b$라 하자.

$L=x^3-7x+6=(x-2)(x+3)(x-1)$이므로

$A=(x-2)(x+3), B=(x-2)(x-1)$로 볼 수 있다.

$\therefore A+B=2x^2-2x-4$

3. 이차항의 계수가 1인 두 이차 다항식의 최대공약수가 $x+2$이고, 최소공배수가 x^3-2x^2-5x+6일 때, 두 다항식의 합은?

① $2(x+2)(x-1)$

② $2(x+2)(x-2)$

③ $(x+2)(x-2)$

④ $2(x+1)(x-1)$

⑤ $(x+1)(x-1)$

해설

$L=(x-1)(x-3)(x+2)$

두 다항식은 $(x-1)(x+2)$, $(x-3)(x+2)$

두 다항식의 합은 $2(x+2)(x-2)$

4. 두 다항식 x^2-3x+a 와 x^2+bx-6 의 최대공약수가 $x-1$ 일 때, 두 다항식의 최소공배수를 $f(x)$ 라 하자. 이 때, $f(x)$ 를 $x-2$ 로 나눈 나머지를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

x^2-3x+a, x^2+bx-6 은

$(x-1)$ 을 인수로 가지므로 $a=2, b=5$

$\therefore\ x^2-3x+2=(x-2)(x-1)$

$x^2+5x-6=(x+6)(x-1)$

$f(x)=(x-1)(x-2)(x+6)$

$f(x)$ 를 $x-2$ 로 나눈 나머지 $f(2)=0$

5. 두 다항식 $A = x^3 + x^2 + ax - 2$, $B = x^3 - x^2 - ax + 4$ 의 최대공약수가 일차식일 때, 상수 a 의 값은?

① 2　　② 1　　③ 0　　④ -1　　⑤ -2

해설

최대공약수를 $x - \alpha$ 라 하자.

나머지정리에 의해 $\alpha^3 + \alpha^2 + a\alpha - 2 = 0$

$\alpha^3 - \alpha^2 - a\alpha + 4 = 0$

두 식을 더하면 $2\alpha^3 = -2,\quad \alpha = -1$

이제 $\alpha = -1$ 을 다시 A 식에 대입하면

$-1 + (-1)^2 - a - 2 = 0 \quad \therefore a = -2$

6. 두 다항식 x^3-2x^2-5x+6과 $3x^3+(a-9)x^2-ax-6a$의 최대공약수가 이차식일 때, a의 값은?

① 1　② -1　③ 2　④ -2　⑤ 3

해설

$x^3-2x^2-5x+6=(x-1)(x-3)(x+2)$

$3x^3+(a-9)x^2-ax-6a$에

$x=3$ 대입, $81+9a-81-3a-6a=0$

$x=-2$ 대입, $-24+4a-36+2a-6a\neq 0$이므로

$x-1$을 인수로 가져야 한다.

$x=1$ 대입 $3+a-9-a-6a=0,\ a=-1$

7. x^4-11x^2+1 이 $(x^2+ax+b)(x^2+3x+b)$로 인수분해될 때, $a+b$의 값은?

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

해설

$$
\begin{aligned}
x^4-11x^2+1 &= (x^2-1)^2-9x^2 \\
&= (x^2-1)^2-(3x)^2 \\
&= (x^2-3x-1)(x^2+3x-1) \\
&= (x^2+ax+b)(x^2+3x+b)
\end{aligned}
$$

$\therefore\ a=-3,\ b=-1$

$\therefore\ a+b=-4$

8. x^4+3x^2+4를 바르게 인수분해한 것은?

① $(x^2+x+1)(x^2-2x+1)$　② $(x^2+2x+2)(x^2-x+2)$

③ $(x^2-x+2)(x^2+x+2)$　④ $(x^2+x-1)(x^2-2x+1)$

⑤ $(x^2+x-2)(x^2+x+2)$

해설

$$\begin{aligned} x^4+3x^2+4 &= (x^4+4x^2+4)-x^2 \\ &= (x^2+2)^2-x^2 \\ &= (x^2+x+2)(x^2-x+2) \end{aligned}$$

9. x^4-6x^2+1을 인수분해 하였더니 $(x^2+ax+b)(x^2+cx+d)$가 되었다. 이 때, $a+b+c+d$의 값을 구하면?

① -2　② 2　③ -1　④ 1　⑤ 4

해설

$x^4-6x^2+1=(x^4-2x^2+1)-4x^2$

$=(x^2-1)^2-(2x)^2$

$=(x^2+2x-1)(x^2-2x-1)$

$=(x^2+ax+b)(x^2+cx+d)$

$\therefore\ a+b+c+d=-2$

10. $198^3+200^3+202^3-3\cdot198\cdot200\cdot202$를 간단히 하면?

① 6800 ② 7000 ③ 7200 ④ 7400 ⑤ 7600

해설

$198=x, 200=y, 202=z$라 하면

$198^3+200^3+202^3-3\cdot198\cdot200\cdot202$

$=x^3+y^3+z^3-3xyz$

$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$

$=\frac{1}{2}(x+y+z)\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\}$

$=\frac{1}{2}\times600\times24$

$=7200$

11. $1^2-2^2+3^2-4^2+5^2-\cdots+99^2$ 을 계산하여라.

① 99 ② 100 ③ 4950

④ 5050 ⑤ 10000

해설

$$
\begin{aligned}
&1^2-2^2+3^2-4^2+5^2-\cdots+99^2\\
&=99^2-98^2+97^2-96^2+\cdots+3^2-2^2+1^2\\
&=(99^2-98^2)+(97^2-96^2)+\\
&\quad\cdots+(3^2-2^2)+1^2\\
&=(99-98)(99+98)+(97-96)(97+96)+\cdots+(3-2)(3+2)+1\\
&=(99+98)+(97+96)+\cdots+(3+2)+1\\
&=1+2+3+\cdots+99\\
&=(1+99)+(2+98)+\cdots+(49+51)+50\\
&=4950
\end{aligned}
$$

12. 인수분해 공식 $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ 을 이용하여 $\dfrac{9999^3+1}{9998 \times 9999 + 1}$ 을 계산하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10000

해설

$9999 = a$라 하면

$$\frac{9999^3+1}{9998 \times 9999 + 1} = \frac{a^3+1}{(a-1)a+1}$$
$$= \frac{(a+1)(a^2-a+1)}{a^2-a+1}$$
$$= a+1 = 10000$$

13. 세 실수 $a,\ b,\ c$ 사이에 $a^2-bc=b^2-ac=c^2-ab$ 인 관계가 성립할 때, $a^3+b^3+c^3-3abc$ 의 값은?

① 0 ② 1 ③ 0, 2

④ 0, 1 ⑤ 0, 1, 2

해설

$a^2-bc=b^2-ac$ 에서 $(a^2-b^2)+(ac-bc)=0$

$\therefore\ (a+b+c)(a-b)=0\cdots$ ㉠

$b^2-ac=c^2-ab$ 에서 $(b^2-c^2)+(ab-ac)=0$

$\therefore\ (a+b+c)(b-c)=0\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $a+b+c=0$ 또는 $a=b=c$

한편 $a^3+b^3+c^3-3abc$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$ 이므로

i) $a+b+c=0$ 일 때 $a^3+b^3+c^3-3abc=0$

ii) $a=b=c$ 일 때

(준식)$=3a^3-3a^3=0$

따라서 $a^3+b^3+c^3-3abc=0$

14. $a+b+c=0$, $abc \neq 0$ 일 때, $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{a^3+b^3+c^3}+\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$$a^3+b^3+c^3-3abc$$
$$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$
$$=0(\because\ a+b+c=0\ )$$
$$\therefore\ a^3+b^3+c^3=3abc$$
$$\therefore(\text{준식})=\frac{a^2+b^2+c^2}{3abc}+\frac{2}{3}\left(\frac{bc+ca+ab}{abc}\right)$$
$$=\frac{(a+b+c)^2}{3abc}=0$$

15. 다음 중 $\left(\frac{997}{1000}\right)^3+\left(\frac{3}{1000}\right)^3-1$ 의 값과 같은 것은?

① $\frac{3^2\times 997^3}{10}$ ② $\frac{3^2\times 997^6}{10}$ ③ $-\frac{3^2\times 997^3}{10}$

④ $-\frac{3^2\times 997}{10^6}$ ⑤ $-\frac{3^2\times 997^9}{10}$

해설

주어진 식에서 $\frac{997}{1000}$ 과 $\frac{3}{1000}$ 을 더해보면 $\frac{997+3}{1000}=1$ 이므로

$a=\frac{997}{1000}$, $b=\frac{3}{100}$, $c=-1$ 이라 하면

$a+b+c=0$ 이 된다.

따라서 $a+b+c=0$ 이므로

$a^3+b^3+c^3-3abc$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$ 에서 $a^3+b^3+c^3=3abc$

임을 이용하면

$a^3+b^3+c^3=\left(\frac{997}{1000}\right)^3+\left(\frac{3}{1000}\right)^3+(-1)^3$ 의 값은

$3abc=3\times\frac{997}{1000}\times\frac{3}{1000}\times(-1)$ 와 같으므로

구하는 값은

$3\times\frac{997}{1000}\times\frac{3}{1000}\times(-1)=-\frac{3^2\times 997}{10^6}$

16. $p(x)=x^2+bx+c$ (b, c 는 정수)가 x^4+6x^2+25 와 $3x^4+4x^2+28x+5$ 의 공약수일 때, $p(1)$ 은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 4 ⑤ 8

해설

$A=Ga$, $B=Gb$ 일 때 (a, b 는 서로소)

$kA-B=Gka-Gb$ (k 는 상수)

$\quad\quad=G(ka-b)$ 이므로

G 는 $kA-B$ 의 약수이다.

$3(x^4+6x^2+25)-(3x^4+4x^2+28x+5)$

$=14x^2-28x+70$

$=14(x^2-2x+5)$,

$p(x)=x^2-2x+5$

$\therefore\ p(1)=4$

17. x 에 관한 두 삼차식 $P = x^3 + ax^2 + 2x - 1$, $Q = x^3 + bx^2 + 1$ 이 이차식의 최대공약수를 가질 때, $2a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -4

해설

$P - Q = (a - b)x^2 + 2x - 2 \cdots$ ㉠

$P + Q = x\left\{2x^2 + (a + b)x + 2\right\} \cdots$ ㉡

P, Q 의 최대공약수를 G 라 하면,

G 는 $P - Q$ 와 $P + Q$ 의 공약수이다.

그런데 G 는 이차이고, P, Q 에는

x 라는 약수가 없으므로 ㉠, ㉡에서 G 는

$(a - b)x^2 + 2x - 2$ 이고 $2x^2 + (a + b)x + 2$ 이다.

$\therefore\ a - b = -2,\ a + b = -2$

$\therefore\ a = -2,\ b = 0$

$\therefore\ 2a + b = -4$

18. 두 다항식 $x^2+ax+bc$ 와 $x^2+bx+ca$가 일차의 최대공약수를 가질 때, 최소공배수를 구하면?

① $(x-a)(x-b)(x-c)$
② $(a-x)(b-x)(c-x)$
③ $(x-a)^2(x-b)(x-c)$
④ $(x-a)(x-b)^2(x-c)$
⑤ $(x-a)(x-b)(x-c)^2$

해설

일차의 최대공약수를 $x-p$라 하면
$p^2+ap+bc=0\cdots$㉠
$p^2+bp+ca=0\cdots$㉡
㉠−㉡에서 $(a-b)p-c(a-b)=(a-b)(p-c)=0$
일차의 최대공약수를 가지므로
$a\neq b,\ p=c$이고 최대공약수는 $x-c$
상수항을 기준으로 인수분해하면 각각
$x^2+ax+bc=(x-c)(x-b)$
$x^2+bx+ca=(x-c)(x-a)$
$\therefore$ 최소공배수는 $(x-a)(x-b)(x-c)$