

1. x^2+ax-9 와 x^2+bx+c 의 합은 $2x^2-4x-6$, 최소공배수는 x^3-x^2-9x+9 이다. $a-b+c$ 의 값을 구하여라. (단, a, b, c 는 상수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$$\begin{aligned} A &= x^2 + ax - 9 = Gp \\ B &= x^2 + bx + c = Gq \text{라 하면} \\ A + B &= (p + q)G = 2x^2 - 4x - 6 = 2(x + 1)(x - 3) \\ L = pqG &= x^3 - x^2 - 9x + 9 = x^2(x - 1) - 9(x - 1) \\ &= (x - 1)(x^2 - 9) = (x - 1)(x + 3)(x - 3) \\ \text{따라서, } G &= x - 3, p = x + 3, q = x - 1 \text{ 이다.} \\ \therefore A &= (x + 3)(x - 3) = x^2 - 9 \\ B &= (x - 1)(x - 3) = x^2 - 4x + 3 \\ \therefore a &= 0, b = -4, c = 3 \\ \therefore a - b + c &= 7 \end{aligned}$$

2. 이차항의 계수가 1인 두 다항식의 최대공약수가 $x-1$, 최소공배수가 x^3-kx+6 일 때, 두 다항식의 합은?

- ① $2x^2-3x-5$ ② $2x^2-3x+1$ ③ $2x^2-x-1$
④ $2x^2+x-3$ ⑤ $2x^2+2x-4$

해설

최소공배수는 최대공약수를 인수로 가지므로

$x=1$ 일 때 $1-k+6=0 \quad \therefore k=7$

$x^3-7x+6=(x-1)(x-2)(x+3)$ 이므로

두 다항식은 $(x-1)(x-2)$, $(x-1)(x+3)$

$\therefore$ 두 다항식의 합은 $2x^2-x-1$

3. 이차항의 계수가 1인 두 이차다항식 A, B 의 최대공약수가 $x+2$ 이고 최소공배수가 x^3+x^2-4x-4 이다. $A+B=ax^2+bx+c$ 를 만족하는 상수 $a+b+c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$x^3+x^2-4x-4=(x+2)(x+1)(x-2)$
두 다항식은 각각 $(x+2)(x+1), (x+2)(x-2)$
 $A+B=(x+2)(x-2)+(x+2)(x+1)$
 $=2x^2+3x-2=ax^2+bx+c$
 $\therefore a=2, b=3, c=-2$
 $\therefore a+b+c=3$

4. $a(a+1)=1$ 일 때, $\frac{a^6-1}{a^4-a^2}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$$\begin{aligned}\frac{a^6-1}{a^4-a^2} &= \frac{(a^3+1)(a^3-1)}{a^2(a^2-1)} \\ &= \frac{(a+1)(a^2-a+1)(a-1)(a^2+a+1)}{a^2(a+1)(a-1)} \\ &= \frac{(a^2-a+1)(a^2+a+1)}{a^2} \leftarrow a^2=1-a \text{ 대입} \\ &= \frac{2(1-a) \times 2}{1-a} = 4\end{aligned}$$

5. 세 개의 실수 a, b, c 에 대하여 $[a, b, c] = (a-b)(a-c)$ 라 할 때, $[a, b, c] + [b, c, a] + [c, a, b] = 0$ 이면 $[a, b, c]$ 의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$$(a-b)(a-c) + (b-c)(b-a) + (c-a)(c-b) = 0$$

$$\text{전개하여 정리하면 } a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 0$$

$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 0$$

$$\therefore a = b = c$$

$$\therefore [a, b, c] = (a-b)(a-c) = 0$$

6. $a + b + c = 0$ 일 때, 다음 중 $2a^2 + bc$ 와 같은 것은?

① $(a - c)^2$

② $(b + c)^2$

③ $(a + b)(b + c)$

④ $(a - b)(a - c)$

⑤ $(a - b)(a + c)$

해설

$$\begin{aligned} 2a^2 + bc &= 2a^2 - b(a + b) \quad (\because c = -a - b) \\ &= 2a^2 - ab - b^2 \\ &= (a - b)(2a + b) \\ &= (a - b)(a + b + a) \\ &= (a - b)(a - c) \quad (\because a + b = -c) \end{aligned}$$

7. $p(x) = x^2 + bx + c$ (b, c 는 정수)가 $x^4 + 6x^2 + 25$ 와 $3x^4 + 4x^2 + 28x + 5$ 의 공약수일 때, $p(1)$ 은?

- ① 0
- ② 1
- ③ 2
- ④ 4
- ⑤ 8

해설

$A = Ga, B = Gb$ 일 때 (a, b 는 서로소)

$kA - B = Gka - Gb$ (k 는 상수)

$= G(ka - b)$ 이므로

G 는 $kA - B$ 의 약수이다.

$3(x^4 + 6x^2 + 25) - (3x^4 + 4x^2 + 28x + 5)$

$= 14x^2 - 28x + 70$

$= 14(x^2 - 2x + 5),$

$p(x) = x^2 - 2x + 5$

$\therefore p(1) = 4$

8. 두 다항식 $x^3 + ax^2 + bx + 1$ 과 $x^3 + bx^2 + ax + 1$ 의 최대공약수가 일차식일 때, $a + b$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$A(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$, $B(x) = x^3 + bx^2 + ax + 1$ 로 놓으면

$A(x) - B(x)$

$= (x^3 + ax^2 + bx + 1) - (x^3 + bx^2 + ax + 1)$

$= (a - b)x(x - 1)$

$A(x)$, $B(x)$ 의 최고차항의 계수가 1 이므로 최대공약수는 x 이거나 $x - 1$ 이 될 수 있지만 두 다항식의 상수항이 1이므로 최대공약수는 $x - 1$ 이다.

따라서 다항식 $A(x)$ 는 $x - 1$ 을 인수로 가지므로 나머지정리에 의하여

$A(1) = 1 + a + b + 1 = 0$

$\therefore a + b = -2$

9. 두 다항식 $x^2 - x + p$ 와 $x^3 + x^2 + x + (p + 3)$ 이 사차의 최소공배수를 갖도록 p 의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

다항식 A, B 의 최소공배수를 L , 최대공약수를 G 라 하면

$AB = GL$ 에서 G 는 1차식이다.

$\therefore$ 최대공약수는 $x + 1$

$x = -1$ 을 대입하면

$2 + p = 0$

$\therefore p = -2$