1. $(1+i)x^2+(1-i)x-6-2i$ 가 순허수가 되는 실수 x 의 값을 구하면?

① -3　　② -2　　③ -1　　④ 2　　⑤ 3

해설

주어진 식을 정리하면 $(x^2+x-6)+(x^2-x-2)i$ 이고
순허수가 되기 위해선 $x^2+x-6=(x+3)(x-2)=0$ 이어야 하므로 $x=-3$ 또는 $x=2$ 이다.
그런데 $x^2-x-2 \neq 0$ 이어야 하므로 $x \neq 2$
따라서 $x=-3$

2. a, b가 실수일 때, $(a+2i)(3+4i)+5(1-bi)=0$을 만족하는 a, b의 값의 합은? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$(a+2i)(3+4i)+5(1-bi)=0$에서

$(3a-3)+(4a-5b+6)i=0$

a, b가 실수이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여 $3a-3=0$, $4a-5b+6=0$

$\therefore\ a=1,\ b=2$

따라서 $a+b=3$ 이다.

3. 복소수 z 와 그의 켤레복소수 $\bar{z}$ 에 대하여 등식 $(1-2i)z - i\bar{z} = 3-5i$ 를 만족하는 z 는?

① $1+i$　② $2+i$　③ $2+2i$

④ $1-i$　⑤ $2-i$

해설

$z = a+bi$ 라 하면 $\bar{z} = a-bi$ 이므로

$(1-2i)(a+bi) - i(a-bi) = a+bi-2ai+2b-ai-b$

$= (a+b)+(-3a+b)i = 3-5i$

따라서 $a+b=3$, $-3a+b=-5$ 이므로 연립하여 풀면

$a=2$, $b=1$

따라서 $z=2+i$ 이다.

4. 실수 x 에 대하여, $\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-2}} = -\sqrt{\dfrac{x+1}{x-2}}$ 이 성립할 때, $|x+1| + |x-2|$ 의 값을 구하면? (단, $(x+1)(x-2) \neq 0$)

① $2x-1$　② $-2x+1$　③ 3　④ -3　⑤ $x+1$

해설

$\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = -\sqrt{\dfrac{b}{a}}$ 을 만족하려면,

$a < 0, \quad b \geq 0$ 이다.

따라서 $x+1 \geq 0,\ x-2 < 0,\ -1 \leq x < 2,\ x \neq -1,\ x \neq 2$

$\therefore\ -1 < x < 2$

$\therefore |x+1| + |x-2| = x+1-x+2 = 3$

5. 복소수 $(1+i)x^2-(2+i)x-3-2i$를 제곱하면 음의 실수가 된다고 할 때, 실수 x의 값은?

① -1　　② 1　　③ 2　　④ 3　　⑤ 4

해설

(준식)$= x^2-2x-3+(x^2-x-2)i$

이것을 제곱해서 음의 실수가 되려면 순허수이어야 하므로

$x^2-2x-3=0 \cdots$ ㉠, $x^2-x-2 \neq 0 \cdots$ ㉡

㉠에서 $x=3,\ x=-1$

이 중에서 ㉡를 만족하는 것은 $\therefore\ x=3$

6. $z=1+i$ 일 때, $\dfrac{\bar{z}-1}{z}-\dfrac{z-1}{\bar{z}}$ 의 값을 구하면?

① $-i$ ② i ③ $-2i$ ④ $2i$ ⑤ $3i$

해설

$\bar{z}=1-i$

$$\begin{aligned}\frac{\bar{z}-1}{z}-\frac{z-1}{\bar{z}} &= \frac{-i}{1+i}-\frac{i}{1-i}\\ &= -\frac{2i}{(1+i)(1-i)}\\ &= -i\end{aligned}$$

7. 복소수 $z = a + bi$ 가 다음 두 조건을 만족한다.

$(1 + i + z)^2 < 0 \qquad z^2 = c + 4i$

이 때, $a^2 + b^2 + c^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

$(1 + i + z)^2 < 0$ 에서 $1 + i + z$ 는 순허수이다.

$z = a + bi$라면

$1 + i + z = 1 + i + a + bi = (1 + a) + (1 + b)i$

이것이 순허수이므로 $1 + a = 0$, $a = -1$

$\therefore\ z = -1 + bi$

또한 $z^2 = c + 4i$ 에서 $(-1 + bi)^2 = c + 4i$

$1 - 2bi - b^2 = c + 4i$

$\therefore\ -2b = 4$, $1 - b^2 = c$

$\therefore\ b = -2,\ c = -3$

$\therefore\ a^2 + b^2 + c^2 = 14$

8. 복소수 $z=(1+i)x^2+(5+2i)x+3(2-i)$ 에서 z가 순허수일 때, 실수 x의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 0 ⑤ 1

해설

$z=(x^2+5x+6)+(x^2+2x-3)i$

$\quad=(x+2)(x+3)+(x-1)(x+3)i$

순허수가 되려면 실수부$=0$, 허수부$\neq 0$

$\therefore\ x=-2$

9. 등식 $(x+yi)(z-i)=10$을 만족하는 자연수 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)의 개수를 구하여라. (단, $i=\sqrt{-1}$)

▶ 답 : ____ 개

▷ 정답 : 3 개

해설

$(xz+y)+(yz-x)i=10$

$xz+y=10 \ \cdots ㉠, \ yz-x=0 \ \cdots ㉡$

㉡을㉠에 대입

$y(z^2+1)=10$

z를 기준으로 하여 순서쌍을 구해보면

$(5,\ 5,\ 1),\ (4,\ 2,\ 2),\ (3,\ 1,\ 3)$ 3개

10. z를 입력시키면 zi가 출력되는 컴퓨터 프로그램이 있다. 어떤 수를 이 프로그램에 입력시켜 나온 결과를 다시 프로그램에 입력시키는 과정을 100번 반복하니 2^{100}이 나왔다. 처음에 입력된 수는 무엇인가? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① $1+i$　② $1-i$　③ $2i$　④ 2　⑤ 2^{100}

해설

$z \to zi \to zi^2 \to zi^3 \to \cdots \to zi^{100}$

$\therefore zi^{100} = 2^{100}$

$\therefore z = 2^{100}$

11. $f(x)=\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^{30}$ 일 때, $f\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)+f\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)$ 의 값을 구하면?

① 1 ② -1 ③ -2 ④ 2 ⑤ 0

해설

$$\frac{1+i}{1-i}=\frac{2i}{2}=i\ ,\ \frac{1-i}{1+i}=\frac{-2i}{2}=-i$$

$$f(i)=\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{30}=(-i)^{30}=(i^4)^7i^2$$

$$=-1f(-i)=\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{30}=i^{30}$$

$$=(i^4)^7i^2=-1$$

$$\therefore f\left(\frac{1+i}{1-i}\right)+f\left(\frac{1-i}{1+i}\right)$$

$$=f(i)+f(-i)=-1-1=-2$$

12. $\alpha = 2+i$, $\beta = 1-2i$ 일 때, $\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 + \frac{1}{\alpha\beta} + \left(\frac{1}{\beta}\right)^2$ 의 값은? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① $\frac{4}{8} - \frac{3}{8}i$ ② $\frac{4}{8} \pm \frac{3}{8}i$ ③ $\frac{4}{25} - \frac{3}{25}i$
④ $\frac{4}{25} + \frac{3}{25}i$ ⑤ $\frac{4}{8} + \frac{3}{8}i$

해설

$\alpha = 2+i,\ \beta = 1-2i = -i(2+i) = -i\alpha$ 이므로 $\beta^2 = -\alpha^2$

$\therefore\ \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} = \frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha^2} = 0$

$$\begin{aligned} \therefore\ (\text{준식}) &= \frac{1}{\alpha\beta} \\ &= \frac{1}{(2+i)(1-2i)} \\ &= \frac{1}{4-3i} \\ &= \frac{4+3i}{25} \\ &= \frac{4}{25} + \frac{3}{25}i \end{aligned}$$

13. $f(x) = \left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{100}$ 일 때, $f\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)$ 의 값은?

① 1　② $1-i$　③ $1+i$　④ -1　⑤ 0

해설

$\dfrac{1+i}{1-i} = i$이므로

$$f\left(\frac{1+i}{1-i}\right) = f(i) = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{100} = i^{100} = 1$$

14. $z^2 = \sqrt{5}+i$ 를 만족하는 복소수 z 에 대하여 $z\bar{z}$ 의 값은? (단, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수)

① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ 2 ④ $\sqrt{5}$ ⑤ $\sqrt{6}$

해설

$z = x+yi$ ($x,\ y$ 는 실수)로 놓으면 $(x+yi)^2 = \sqrt{5}+i$

$x^2-y^2+2xyi = \sqrt{5}+i$ 에서 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$x^2-y^2 = \sqrt{5},\ 2xy = 1$

$z\bar{z} = (x+yi)(x-yi) = x^2+y^2$ 이므로

$$(x^2+y^2)^2 = (x^2-y^2)^2+4x^2y^2 = (\sqrt{5})^2+4\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 6$$

$x^2+y^2>0$ 이므로 $x^2+y^2 = \sqrt{6}$

$\therefore\ z\bar{z} = \sqrt{6}$

해설

$z^2 = \sqrt{5}+i$, $\overline{z^2} = \sqrt{5}-i$

$z^2\overline{z^2} = (\sqrt{5}+i)(\sqrt{5}-i) = 6$

$z\bar{z} = \pm\sqrt{6}$

$z\bar{z} \geq 0$ 이므로 $z\bar{z} = \sqrt{6}$

15. $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$, $\beta = \dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$ 일 때, $\alpha^{99}+\beta^{99}$ 의 값을 구하면?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

$\alpha = \dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}, \beta = \dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$ 에서 각각 양변에 2를 곱하고 1을 이항한 후 양변을 제곱해서 정리하면

$\alpha^2-\alpha+1=0, \beta^2-\beta+1=0$

두 식에 각각 $\alpha+1, \beta+1$ 를 곱하면

$(\alpha+1)(\alpha^2-\alpha+1)=0, (\beta+1)(\beta^2-\beta+1)=0$

$\therefore\ \alpha^3=-1, \beta^3=-1$

$\therefore \alpha^{99}+\beta^{99}=(\alpha^3)^{33}+(\beta^3)^{33}=-1-1=-2$

해설

$\alpha+\beta=1, \alpha\beta=1$ 이므로

α, β 를 두 근으로 하는 이차방정식을 만들면

$x^2-x+1=0$

$\therefore (x+1)(x^2-x+1)=(x^3+1)=0$

$\alpha^3=-1, \beta^3=-1$

$\therefore \alpha^{99}+\beta^{99}=(\alpha^3)^{33}+(\beta^3)^{33}=-1-1=-2$