1. $\dfrac{a}{1-i}+\dfrac{b}{1+i}=5$를 만족하는 두 실수 $a,\ b$에 대하여 곱 ab의 값을 구하면?

① 5　② 10　③ 15　④ 20　⑤ 25

해설

$\dfrac{a(1+i)}{2}+\dfrac{b(1-i)}{2}=5$
$a(1+i)+b(1-i)=10,$
$(a+b)+(a-b)i=10$
$a+b=10,\ a-b=0$
$2a=10,\ a=5,\ b=5,\ ab=25$

2. 이차방정식 $3x^2-6x+4=0$의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라고 할 때, $\alpha^3+\beta^3$의 값을 구하면?

① -2　　② -1　　③ 0　　④ 1　　⑤ 2

해설

$\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=\frac{4}{3}$

$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

$=8-3\times\frac{4}{3}\times 2=0$

3. 다음 중에서 성립하지 않는 것은?

① $a^2 \geq 0$ ② $a^2 + b^2 \geq 0$

③ $a^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0$ ④ $a^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$

⑤ $a > b \Leftrightarrow ab > 0$

해설

① $a^2 \geq 0$ (항상 성립)
② $a^2 + b^2 \geq 0$ (항상 성립)
③ $a^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0$ (항상 성립)
④ $a^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$ (항상 성립)
⑤ $a > b \Leftrightarrow ab > 0$
(반례 : $a > 0$, $b < 0$이면 $a > b$이지만 $ab < 0$이다.)

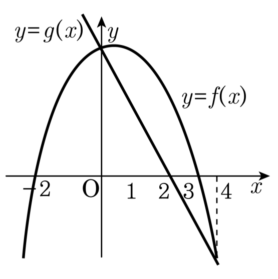
4. 다음 연립부등식 $\begin{cases} 0.3x + 1.2 > 0.5x \\ \frac{2}{3}x - \frac{1}{2} < \frac{3}{4}x \end{cases}$ 를 만족하는 모든 정수 x 의 합은?

① 6 ② 3 ③ 1 ④ 0 ⑤ −2

해설

i) $0.3x + 1.2 > 0.5x$ 의 양변에 10 을 곱하면
$3x + 12 > 5x,\ x < 6$
ii) $\frac{2}{3}x - \frac{1}{2} < \frac{3}{4}x$ 의 양변에 12 를 곱하면
$8x - 6 < 9x\ ,\ x > -6$
$\therefore\ -6 < x < 6$ 만족하는 정수는 −5, −4, −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, 4, 5 이고 이들의 합은 0 이다.

5. 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = g(x)$ 가 다음 그림과 같을 때, 부등식 $f(x) > g(x)$ 의 해를 구하면?



① $-2 < x < 4$　　② $-2 < x < 3$

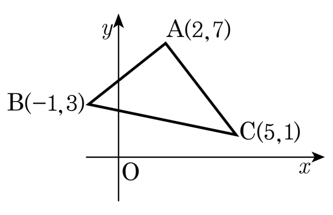
③ $0 < x < 4$　　④ $2 < x < 3$

⑤ $3 < x < 4$

해설

부등식 $f(x) > g(x)$ 의 해는
함수 $f(x)$ 의 그래프가 직선 $y = g(x)$ 보다
위쪽에 있는 x 의 구간을 의미하므로
구하는 해는 $0 < x < 4$

6. 세 점 $A(2,\ 7)$, $B(-1\ ,3)$, $C(5,\ 1)$을 꼭지점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심을 G라 할 때, 다음 중 두 점 A, G를 지나는 직선의 방정식은?



① $x-y-2=0$　② $x+y-2=0$　③ $x-2=0$

④ $3x-y+1=0$　⑤ $4x+y-1=0$

해설

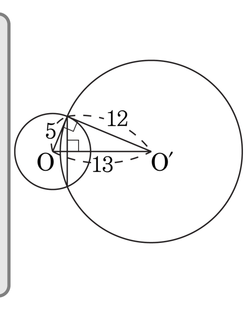
두 점 A, G를 지나는 직선은 $\overline{BC}$ 의 중점을 지나므로
점A와 $\overline{BC}$ 의 중점을 지나는 직선의 방정식을 구하면 된다.
$\overline{BC}$ 의 중점의 좌표는
$$\left(\frac{-1+5}{2}, \frac{3+1}{2}\right)$$
따라서, 두 점$(2,\ 7)$ 과$(2,\ 2)$를 지나는 직선의 방정식은 $x=2$ 이다.

7. 두 원 O와 O′ 의 반지름의 길이가 각각 5 cm, 12 cm 이고 중심거리가 13 cm 일 때, 두 원의 공통현의 길이는?

① $\frac{60}{13}$ ② $\frac{90}{13}$ ③ $\frac{120}{13}$ ④ $\frac{150}{13}$ ⑤ $\frac{180}{13}$

해설

다음 그림처럼 공통현의 길이를 x 라 하면
$\triangle OO'A$ 는 직각삼각형이므로
$\frac{1}{2} \times 5 \times 12 = \frac{1}{2} \times 13 \times \frac{x}{2}$
$\therefore \ x = \frac{120}{13}$



8. 점 $(3, 4)$를 y축, x축, 원점에 대하여 대칭이동하는 것을 순서에 관계 없이 임의로 반복할 때, 좌표평면 위에 나타나지 않는 점은?

① $(3, -4)$ ② $(-3, 4)$ ③ $(-3, -4)$
④ $(4, 3)$ ⑤ $(3, 4)$

해설

x축대칭은 y의 부호를 반대로, y축대칭은 x의 부호를 반대로, 원점대칭은 x, y부호를 각각 반대로 해주면 된다.

9. 방정식 $\left[x+\frac{1}{2}\right]^2-3\left[x-\frac{1}{2}\right]-7=0$의 해 $a \le x < b$ 또는 $c \le x < d$에 대하여 $a+b+c+d$의 값은? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대 정수)

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$\left[x-\frac{1}{2}\right]=\left[x+\frac{1}{2}\right]-1$이므로

$\left[x+\frac{1}{2}\right]^2-3\left[x+\frac{1}{2}\right]-4=0$

$\left[x+\frac{1}{2}\right]=4$ 또는 $\left[x+\frac{1}{2}\right]=-1$이므로

$\frac{7}{2} \le x < \frac{9}{2}, -\frac{3}{2} \le x < -\frac{1}{2}$이다

따라서 구하는 값은

$\therefore a+b+c+d=6$

10. x의 이차식 $x^2+(3a+1)x+2a^2-b^2$이 완전제곱식이고, a, b가 정수일 때, 순서쌍 (a,b)의 갯수는?

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

완전제곱식이 되려면 판별식이 0이다.
$D=(3a+1)^2-4(2a^2-b^2)=0$
$a^2+6a+1+4b^2=0$
$\Rightarrow \quad (a+3)^2+(2b)^2=8$
a,b가 정수이므로
$a+3=\pm 2, \quad 2b=\pm 2$
$\therefore \quad a=-1, \ -5, \quad b=1,-1$
가능한 순서쌍 (a,b)의 갯수 : 4개

11. 이차방정식 $x^2-2x-1=0$의 두 근을 α, β라 한다. $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$을 두 근으로 하고, x^2의 계수가 1인 이차방정식이 $x^2+ax+b=0$일 때, $a-b$의 값을 구하시오.

① -1 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 5

해설

$x^2-2x-1=0$의 두 근이 α, β이므로 근과계수와의 관계로부터
$\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=-1$
2와 -1을 두 근으로 하는 이차방정식은
$x^2-(2-1)x+2\cdot(-1)=0$
$x^2-x-2=0 \Leftrightarrow x^2+ax+b=0$
$\therefore\ a=-1,\ b=-2$

12. 이차함수 $y = x^2 - 2ax + a$ 의 그래프가 x 축과 만나지 않도록 하는 상수 a 의 값의 범위를 구하면?

① $a < 0, a > 1$ ② $0 < a < 1$ ③ $a < 1, a > 2$
④ $1 < a < 2$ ⑤ $a < -1, a > 2$

해설

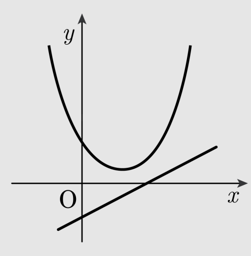
$y = x^2 - 2ax + a$ 의 그래프가
x 축과 만나지 않으면
판별식 D 가 $D < 0$ 이므로
$\frac{D}{4} = a^2 - a < 0,\ a(a-1) < 0$
$\therefore\ 0 < a < 1$

13. 포물선 $y = x^2 - 2x + 3$ 이 직선 $y = 2x + k$ 보다 위쪽에 있도록 실수 k 의 범위를 구하면?

① $k < -1$ ② $-1 < k < 0$ ③ $k > 0$

④ $0 < k < 1$ ⑤ $k > 1$

해설



포물선 $y = x^2 - 2x + 3$ 이 직선 $y = 2x + k$ 보다 위쪽에 있으려면

위 그림에서 모든 실수 x 에 대하여 부등식 $x^2 - 4x + 3 - k > 0$가 항상 성립해야 한다.

즉 $x^2 - 4x + 3 - k > 0$ 에서

판별식이 0 보다 작아야 하므로

$$\frac{D}{4} = 4 - (3 - k) < 0$$

$\therefore\ k < -1$

14. 두 원 $x^2+y^2-4x=0$, $x^2+y^2-6y+8=0$ 의 공통외접선의 길이는?

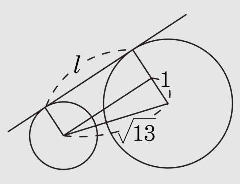
① $2\sqrt{3}$ ② $\sqrt{13}$ ③ $\sqrt{21}$ ④ $2\sqrt{6}$ ⑤ $3\sqrt{6}$

해설

$(x-2)^2+y^2=4,\ x^2+(y-3)^2=1$

$l=\sqrt{(\sqrt{13})^2-1^2}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

$\therefore$ 외접선의 길이 : $2\sqrt{3}$



15. 중심이 C(1, 2) 이고, 직선 L : $x+2y=0$ 에 접하는 원의 방정식을 구하면?

① $(x-1)^2+(y-2)^2=5$ ② $(x-1)^2+(y-2)^2=6$

③ $(x-1)^2+(y-2)^2=7$ ④ $(x-1)^2+(y-2)^2=8$

⑤ $(x-1)^2+(y-2)^2=9$

해설

중심에서 접선까지의 거리가
원의 반지름과 같으므로
반지름은 $\dfrac{|1+4|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\dfrac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$
$\therefore$ 구하는 원의 방정식은
$(x-1)^2+(y-2)^2=5$

16. 원 $x^2 + y^2 = 5$와 직선 $y = 2x + k$가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 실수 k의 값의 범위는?

① $k < -5$ 또는 $k > 5$
② $-5 < k < 5$
③ $k < -\sqrt{5}$ 또는 $k > 5$
④ $-\sqrt{5} < k < \sqrt{5}$
⑤ $-2 < k < 2$

해설

$x^2 + y^2 = 5$에 $y = 2x + k$를 대입하면
$x^2 + (2x + k)^2 = 5$
$5x^2 + 4kx + k^2 - 5 = 0$
원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나므로 위의 이차방정식의 판별식을 D라 하면 $D > 0$이다.
$\frac{D}{4} = (2k)^2 - 5\left(k^2 - 5\right) > 0$
$-k^2 + 25 > 0$
$(k - 5)(k + 5) < 0$
$\therefore -5 < k < 5$

17. 평행이동 $f: (x,\ y) \rightarrow (x+a,\ y+b)$에 의하여 점 $(1,\ 2)$는 점 $(-1,\ 3)$으로 옮겨진다. 이 때, 평행이동 f에 의하여 원 $x^2+y^2+2x-2y+1=0$이 옮겨진 원의 중심의 좌표는?

① $(1, -2)$　　② $(-3,\ 2)$　　③ $(2, -1)$

④ $(-1,\ 2)$　　⑤ $(2, -3)$

해설

평행이동 f는 x축의 방향으로 -2,
y축의 방향으로 $+1$만큼
평행이동 하는 변환이다.
$x^2+y^2+2x-2y+1=0$의 중심은
$(-1,\ 1)$이므로 평행이동 f에 의하여
$(-1-2,\ 1+1)=(-3,\ 2)$로 이동한다.

18. 이차함수 $y = -x^2 - 2kx + 4k$ 의 최댓값이 M 일 때, M 의 최솟값을 구하면?

① 1　② -2　③ 3　④ -4　⑤ 5

해설

$y = -x^2 - 2kx + 4k = -(x+k)^2 + k^2 + 4k$
$M = k^2 + 4k$ 이므로
$M = (k+2)^2 - 4$ 이다.
따라서 M 의 최솟값은 -4 이다.

19. x에 대한 이차방정식 $x^2+2ax+6-a=0$의 모든 실근이 모두 1보다 클 때, 실수 a 의 값의 범위는?

① $3 < a \le 7$ ② $-3 \le a < 7$

③ $-7 < a \le -3$ ④ $a \le 3$ 또는 $a > 7$

⑤ $a < -7$ 또는 $a \ge -3$

해설

이차함수 $f(x) = x^2 + 2ax + 6 - a$의 그래프를 생각하면

$\frac{D}{4} = a^2 - 6 + a \ge 0, \quad (a+3)(a-2) \ge 0$

$\therefore\ a \le -3,\ a \ge 2 \cdots$ ㉠

$f(1) = 1 + 2a + 6 - a > 0$

$\therefore\ a > -7 \cdots\cdots$ ㉡

대칭축 $x = -a$ 에서 $-a > 1$

$\therefore\ a < -1 \cdots\cdots$ ㉢

㉠, ㉡, ㉢의 공통범위는 $-7 < a \le -3$

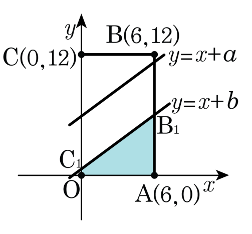
20. 직선 $x+y=2$ 위에 있고, 두 점 $\mathrm{A}(0,6)$, $\mathrm{B}(2,2)$ 에서 같은 거리에 있는 점을 P 라 할 때, $\overline{\mathrm{AP}}$ 의 길이를 구하면?

① 2 ② $\sqrt{5}$ ③ $2\sqrt{2}$ ④ $\sqrt{10}$ ⑤ 5

해설

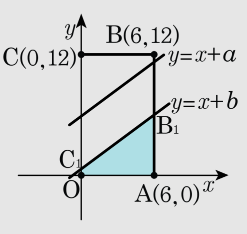
$x+y=2$ 위에 있는 점 P 는
$(\alpha, -\alpha+2)$ 로 나타낼 수 있다.
$\overline{\mathrm{AP}}^2 = \overline{\mathrm{BP}}^2$ 이므로
$\alpha^2 + (-\alpha-4)^2 = (\alpha-2)^2 + (-\alpha)^2$
$\alpha = -1$
$\mathrm{P}(-1,\ 3)$
$\therefore\ \overline{AP} = \sqrt{(-1)^2+(-3)^2} = \sqrt{10}$

21. 네 점 O$(0, 0)$, A$(6, 0)$, B$(6, 12)$, C$(0, 12)$를 꼭지점으로 하는 사각형 OABC가 있다. 그림과 같이 두 직선 $y = x + a$, $y = x + b$가 사각형 OABC의 넓이를 삼등분할 때, ab의 값은?



① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설



사각형 OABC의 넓이가 72이므로
사각형 OAB$_1$C$_1$의 넓이는 24이다.
$\frac{1}{2}(b + 6 + b) \times 6 = 24$이므로 $b = 1$
같은 방법으로 $a = 5$
$\therefore\ ab = 5$

22. A$(3,\ -1)$에서 원 $x^2+y^2=5$에 그은 접선의 방정식을 구하면?

① $x-2y-6=0, 2x+y-4=0$

② $x-2y-5=0, 2x+y-5=0$

③ $x-2y-4=0, 2x+y-5=0$

④ $x-2y-3=0, 2x+y-4=0$

⑤ $x-2y-2=0, 2x+y-3=0$

해설

점 A를 지나는 접선의 기울기를 m이라 하면, $y=m(x-3)-1$
접선이므로 원 중심에서 직선까지 거리는 반지름과 같다.

$\dfrac{|-3m-1|}{\sqrt{m^2+1^2}}=\sqrt{5}$

$2m^2+3m-2=0$

$\therefore\ m=\dfrac{1}{2},\ -2$

$y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{5}{2},\quad y=-2x+5$ 이므로

접선의 방정식은 $x-2y-5=0$ *or* $2x+y-5=0$

23. $-1 \le x \le 2$ 에서 이차함수 $f(x) = x^2 + 2ax + 1$ 의 최소값이 -8 일 때, 모든 실수 a 의 값의 합은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ $\frac{5}{4}$ ④ $\frac{7}{4}$ ⑤ $\frac{9}{4}$

해설

$f(x) = x^2 + 2ax + 1 = (x+a)^2 + 1 - a^2$ 에서 꼭지점의 x 좌표는 $-a$ 이다.

(i) $-a < -1$, 즉 $a > 1$ 일 때, $-1 \le x \le 2$ 에서
$f(x)$ 의 최솟값은 $f(-1) = 2 - 2a = -8$
$\therefore\ a = 5$

(ii) $-1 \le -a < 2$, 즉 $-2 < a \le 1$ 일 때, $-1 \le x \le 2$ 에서
$f(x)$ 의 최솟값은 $f(-a) = 1 - a^2 = -8,\ a^2 = 9$
$\therefore\ a = \pm 3$
$-2 < a \le 1$ 이므로 a 의 값은 존재하지 않는다.

(iii) $-a \ge 2$, 즉 $a \le -2$ 일 때, $-1 \le x \le 2$ 에서
$f(x)$ 의 최솟값은 $f(2) = 5 + 4a = -8$
$\therefore\ a = -\frac{13}{4}$

따라서 모든 실수 a 의 값의 합은 $5 + \left(-\frac{13}{4}\right) = \frac{7}{4}$

24. 삼차방정식 $2x^3 - 7x^2 + (a+5)x - a = 0$의 세 근 중 두 근은 서로 다르고 역수 관계가 성립한다. 이 때, a의 값을 구하면?

① 5 ② 4 ③ 3 ④ 2 ⑤ 1

해설

$f(x) = 2x^3 - 7x^2 + (a+5)x - a$라면
$f(1) = 2 - 7 + a + 5 - a = 0$이므로
$f(x)$는 $x - 1$로 나누어떨어진다.
$\therefore\ (x-1)(2x^2 - 5x + a) = 0$
따라서, $2x^2 - 5x + a = 0$에서 두 근을 α, β라 하면,
α, β는 서로 다르고 서로 역수의 관계에 있으므로 $\alpha\beta = 1$
$\therefore\ \alpha\beta = \dfrac{a}{2} = 1$에서 $a = 2$

25. 이차방정식 $x^2 - mx + m + 4 = 0$의 두 근이 모두 정수가 되는 m의 값은 두 개가 있다. 다음 중 이 두 수를 근으로 하는 이차방정식은?

① $x^2 + 4x + 32 = 0$　② $x^2 + 4x - 32 = 0$

③ $x^2 - 4x + 32 = 0$　④ $x^2 - 4x - 32 = 0$

⑤ $x^2 + 4x - 30 = 0$

해설

이차방정식의 두 근을 α, β라고 하면근과 계수의 관계에서

$\alpha + \beta = m$ ······㉠

$\alpha\beta = m + 4$······㉡

㉡−㉠하면 $\alpha\beta - \alpha - \beta + 1 = 5$, $(\alpha - 1)(\beta - 1) = 5$

$\alpha - 1$	$\beta - 1$	α	β	$\alpha + \beta = m$
1	5	2	6	8
5	1	6	2	8
−1	−5	0	−4	−4
−5	−1	−4	0	−4

따라서 $m = 8,\ -4$이고 이 두 수를 두 근으로 하는 이차방정식은

$x^2 - 4x - 32 = 0$