

1. 다음 중 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 6 \text{의 약수}\}$ 의 부분집합인 것을 고르면?

① $\{0, 2\}$

② $\{1, 4\}$

③ $\{1, 2, 6\}$

④ $\{1, 3, 5\}$

⑤ $\{4, 5, 6\}$

해설

$A = \{x \mid x \text{는 } 6 \text{의 약수}\} = \{1, 2, 3, 6\}$
따라서 $\{1, 2, 6\} \subset A$ 이다.

2. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 의 부분집합 중 1은 반드시 원소로 하고 5는 원소로 하지 않는 부분집합의 개수는?

① 2개 ② 4개 ③ 8개 ④ 16개 ⑤ 32개

해설

$$2^{5-1-1} = 2^3 = 8(\text{개})$$

3. 집합 A 에 대하여 다음 중 옳지 않은 것은?

① $\emptyset \subset A$

② $A \subset A$

③ $A \subset (A \cup B)$

④ $A \subset (A \cap B)$

⑤ $(B \cap A) \subset B$

해설

④ $A \supset (A \cap B)$

4. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $n(A \cup B) = 35, n(A \cap B^c) = 11, n(A^c \cap B) = 13$ 일 때, $n(A \cap B)$ 의 값은?

① 9

② 11

③ 13

④ 15

⑤ 17

해설

$$\begin{aligned}n(A \cap B) &= n(A \cup B) - n(A \cap B^c) - n(A^c \cap B) \\&= 35 - 11 - 13 = 11\end{aligned}$$

5. 다음 중에서 명제 ‘자연수 n 의 각 자리 숫자의 합이 6의 배수이면, n 은 6의 배수이다.’가 거짓임을 보여주는 n 의 값은?

① 30

② 33

③ 40

④ 42

⑤ 답 없음

해설

실제로 주어진 명제는 참이 아니다. 33의 경우 $3+3=6$ 이지만, 33은 6의 배수가 아니다.

6. 방정식 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$ 을 만족하는 양의 정수 x, y 에 대하여 xy 의 최솟값은?

① 16 ② 17 ③ 18 ④ 19 ⑤ 20

해설

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq 2\sqrt{\frac{1}{xy}}, \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2} \text{ 이므로}$$

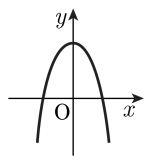
$$\frac{1}{2} \geq 2\sqrt{\frac{1}{xy}}, \quad \frac{1}{4} \geq \sqrt{\frac{1}{xy}}$$

$$\therefore \frac{1}{16} \geq \frac{1}{xy}$$

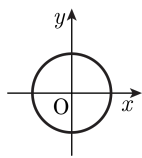
따라서 $xy \geq 16$ 이므로 xy 의 최솟값은 16

7. 다음 중 함수의 그래프인 것은?

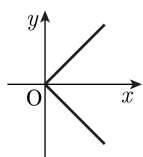
①



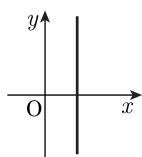
②



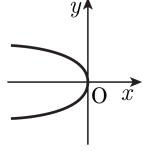
③



④



⑤



해설

함수는 하나의 x 값에 여러 개의 y 값이 대응될 수 없다.

8. $f : X \rightarrow Y$, $x \rightarrow f(x)$ 라 한다. X 의 임의의 두 원소를 a, b 라 할 때, 다음 중에서 f 가 일대일 함수일 조건은?

- ① $a = b$ 이면 $f(a) = f(b)$ ② $f(a) = f(b)$ 이면 $a = b$
③ $f(a) \neq f(b)$ 이면 $a \neq b$ ④ $a \neq b$ 이면 $f(a) = f(b)$
⑤ $a = b$ 이면 $f(a) \neq f(b)$

해설

일대일함수의 정의

「 $a \neq b$ 이면, $f(a) \neq f(b)$ 」의 대우

9. 정수를 원소로 하는 두 집합 $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{a+k, b+k, c+k, d+k\}$ 에 대하여, $A \cap B = \{2, 5\}$ 이고, A 에 속하는 모든 원소의 합이 12, $A \cup B$ 에 속하는 모든 원소의 합이 33일 때, k 의 값은?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

A 에 속하는 원소들의 합을 $S(A)$ 라 하면,
 $S(A \cup B) = S(A) + S(B) - S(A \cap B)$,
 $33 = 12 + S(B) - 7$
 $\therefore S(B) = 28$
 $= a + b + c + d + 4k$
 $= 12 + 4k$
 $\therefore 4k = 16$
 $\therefore k = 4$

10. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $(A \cup B) - A = \emptyset$ 이 성립하기 위한 필요충분조건인 것은?

① $A \cap B = \emptyset$

② $A \cap B \neq \emptyset$

③ $A \cap B = A$

④ $A \cup B = A$

⑤ $A \cup B = U$

해설

$$(A \cup B) - A = \emptyset \Leftrightarrow A \cup B = A$$

11. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$ 가 $f(2x+1) = 6x-5$ 를 만족시킬 때, $f(4)$ 의 값은 얼마인가?

① -8

② -3

③ 1

④ 4

⑤ 9

해설

$f(2x+1) = 6x-5 \cdots \cdots \textcircled{1}$ 에서
 $2x+1 = 4$ 를 만족시키는 x 의 값은

$$x = \frac{3}{2}$$

따라서, $x = \frac{3}{2}$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면,

$$f(4) = 6 \times \frac{3}{2} - 5 = 4$$

12. $x = 1$ 일 때,
 $\frac{1}{x(x+1)} + \frac{2}{(x+1)(x+3)} + \frac{3}{(x+3)(x+6)} + \frac{4}{(x+6)(x+10)}$ 의 값
을 구하면?

- ① $\frac{8}{11}$ ② $\frac{10}{11}$ ③ $\frac{12}{11}$ ④ $\frac{8}{9}$ ⑤ $\frac{10}{9}$

해설

이항분리 이용

$$\begin{aligned} & \frac{1}{x(x+1)} + \frac{2}{(x+1)(x+3)} + \frac{3}{(x+3)(x+6)} + \frac{4}{(x+6)(x+10)} \\ &= \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{2}{2} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+3} \right) \\ & \quad + \frac{3}{3} \left(\frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+6} \right) + \frac{4}{4} \left(\frac{1}{x+6} - \frac{1}{x+10} \right) \\ &= \frac{1}{x} - \frac{1}{x+10} \\ & x = 1 \text{ 대입하면 } \frac{1}{1} - \frac{1}{1+10} = 1 - \frac{1}{11} = \frac{10}{11} \end{aligned}$$

13. $a + \frac{1}{b} = c$, $b + \frac{1}{c} = d$, $c + \frac{1}{d} = a$ 일 때, ab 의 값은?

- ① $-\frac{3}{2}$ ② -1 ③ $-\frac{1}{2}$ ④ 0 ⑤ 1

해설

$c = a + \frac{1}{b}$ 을 $b + \frac{1}{c} = d$ 에 대입하면

$$d = b + \frac{1}{a + \frac{1}{b}} = b + \frac{b}{ab + 1} = \frac{ab^2 + 2b}{ab + 1}$$

c 와 d 를 $a = c + \frac{1}{d}$ 에 대입하면

$$a = a + \frac{1}{b} + \frac{ab + 1}{ab^2 + 2b} \text{ 에서 } \frac{ab + 2 + ab + 1}{ab^2 + 2b} = 0$$

$$\therefore \frac{2ab + 3}{ab^2 + 2b} = 0$$

따라서 $2ab + 3 = 0$ 이므로 $ab = -\frac{3}{2}$

14. $\sqrt{12-6\sqrt{3}}$ 의 정수 부분이 a , 소수 부분이 b 라 할 때, $\frac{1}{b}-a$ 의 값을 구하면?

① $1+\sqrt{3}$

② $2+\sqrt{3}$

③ $2-\sqrt{3}$

④ $3+\sqrt{3}$

⑤ $3-\sqrt{3}$

해설

$$\sqrt{12-6\sqrt{3}} = \sqrt{12-2\sqrt{27}} = 3-\sqrt{3}$$

따라서 $a=1$, $b=2-\sqrt{3}$ ($\because 1<\sqrt{3}<2$)

$$\therefore \frac{1}{b}-a = \frac{1}{2-\sqrt{3}}-1 = 1+\sqrt{3}$$

15. $x = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$, $y = \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$ 일 때, $\frac{x-y}{x+y} + \frac{x+y}{x-y}$ 의 값을 구하면?

- ① $\frac{6\sqrt{5}}{5}$ ② $\sqrt{5}$ ③ $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ ④ $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

해설

$$x = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} = \sqrt{\frac{6+2\sqrt{5}}{4}} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

$$y = \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} = \sqrt{\frac{6-2\sqrt{5}}{4}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

$$\therefore x+y = \sqrt{5}, \quad x-y = 1$$

$$\therefore \frac{x-y}{x+y} + \frac{x+y}{x-y} = \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{5}}{1} = \frac{6\sqrt{5}}{5}$$

16. 함수 $y = a\sqrt{x}$ 에 대하여 옳지 않은 것을 모두 고른 것은? (단, $a \neq 0$)

- ㉠ 정의역은 $\{x \mid x \geq 0\}$ 이다.

㉡ $a > 0$ 이면 제 2 사분면을 지난다.

㉢ $y = a\sqrt{-x}$ 의 그래프와 x 축에 대하여 대칭이다.

- ① ㉠

② ㉡

③ ㉠, ㉡

④ ㉡, ㉢

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

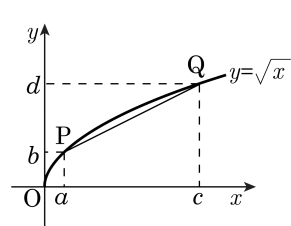
㉡ $a > 0$ 이면 제 1 사분면을 지난다.

㉢ $y = a\sqrt{-x}$ 의 그래프와 y 축에 대하여 대칭이다.

따라서 옳지 않은 것은 ㉡, ㉢ 이다.

17. 함수 $y = \sqrt{x}$ 의 그래프 위의 두 점 $P(a, b), Q(c, d)$ 에 대하여 $\frac{b+d}{2} = 1$ 일 때, 직선 PQ 의 기울기를 구하면? (단, $0 < a < c$)

- ① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{3}$
 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1



해설

두 점 $P(a, b), Q(c, d)$ 는
 함수 $y = \sqrt{x}$ 의 그래프 위의 점이므로
 $b = \sqrt{a}, d = \sqrt{c}$
 $\therefore a = b^2, c = d^2$
 따라서 직선 PQ 의 기울기는
 $\frac{d-b}{c-a} = \frac{d-b}{d^2-b^2} = \frac{d-b}{(d-b)(d+b)} = \frac{1}{d+b}$ 이고
 $\frac{b+d}{2} = 1$ 에서 $b+d = 2$ 이므로
 $(\therefore \text{직선 PQ 의 기울기}) = \frac{1}{2}$

18. 전체집합 $\{x \mid 1 \leq x \leq 10, x \text{ 는 정수}\}$ 의 두 부분집합 $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $B = \{3, 4, 6\}$ 가 있다. $A \cup X = B \cup X$ 가 성립하는 U 의 부분집합 X 의 개수를 구하면?

- ① 16 개 ② 32 개 ③ 64 개
④ 128 개 ⑤ 256 개

해설

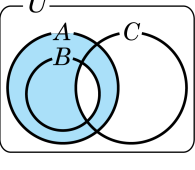
$A \cup X = B \cup X$ 가 성립하려면 X 에 $A \cap B$ 의 원소는 들어 있어도 되고 들어 있지 않아도 상관없다. 그러나 그 외의 A, B 의 원소는 반드시 들어 있어야 한다. 즉 집합 X 는 2, 3, 8, 10 이 모두 포함된 U 의 부분집합이다.

$\therefore \{1, 4, 5, 6, 7, 9\}$ 의 부분집합의 개수와 같다.

따라서 $2^6 = 64(\text{개})$ 이다.

19. 다음 벤 다이어그램의 색칠한 부분을 나타내는 집합은?

- ① $A - (B \cap C)$
- ② $(A - B) \cap C$
- ③ $(A \cup B) - C$
- ④ $(A \cup C) - B$
- ⑤ $(A \cap B) \cup C$



해설

②

③

④

⑤

20. $[A - (A^c \cap B^c)] \cup [(C^c \cup A) \cap C] = A \cup C$ 성립할 때, 다음 중 항상 성립하는 것은?

① $C - A = C$

② $A \cap C = A$

③ $A \cup B = B$

④ $A^c \subset C^c$

⑤ $B \cap C = C$

해설

$$\begin{aligned} & [A - (A^c \cap B^c)] \cup [(C^c \cup A) \cap C] \\ &= [A \cap (A^c \cap B^c)^c] \cup [(C^c \cup A) \cap C] \\ &= [A \cap (A \cup B)] \cup [(C^c \cap C) \cup (A \cap C)] \\ &= A \cup (A \cap C) = A \\ \therefore A \cup C = A &\leftrightarrow C \subset A \leftrightarrow A^c \subset C^c \end{aligned}$$

21. 함수 $f(x)$ 가 임의의 x, y 에 대하여 $f(x) \cdot f(y) = f(x+y) + f(x-y)$ 를 만족시킬 때 $2f(0) + f(2)$ 의 값은? (단, $f(1) = 1$)

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$f(x) \cdot f(y) = f(x+y) + f(x-y)$ 는 임의의 x, y 에 대하여 항상 성립하므로

$$x=1, y=0 \text{ 일 때 } f(1) \cdot f(0) = f(1) + f(1)$$

$$\therefore f(0) = 2 \quad (\because f(1) = 1)$$

$$x=1, y=1 \text{ 일 때 } f(1) \cdot f(1) = f(2) + f(0) \text{ 에서 } 1 = f(2) + 2$$

$$\therefore f(2) = -1$$

$$\therefore 2f(0) + f(2) = 4 - 1 = 3$$

22. $\frac{x(y+z)}{27} = \frac{y(z+x)}{32} = \frac{z(x+y)}{35}$ 에서 $\frac{x^2+y^2}{z^2}$ 의 값은? (단, x, y, z 는 모두 양수이다.)

- ① 1
- ② 2
- ③ 3
- ④ 4
- ⑤ 5

해설

$\frac{x(y+z)}{27} = \frac{y(z+x)}{32} = \frac{z(x+y)}{35} = k(k \neq 0)$ 라 하면
 $xy + zx = 27k$, $zy + xy = 32k$, $zx + yz = 35k$ 이므로
 $2(xy + yz + zx) = 94k$, $\therefore xy + yz + zx = 47k$ 이므로
 $yz = 20k$, $zx = 15k$, $xy = 12k$
또, $x^2 \cdot y^2 \cdot z^2 = 3600k^3$ 이므로
 $x^2 \cdot 400k^2 = 3600k^3$ 에서 $x^2 = 9k$
 $225k^2 \cdot y^2 = 3600k^3$ 에서 $y^2 = 16k$
 $144k^2 \cdot z^2 = 3600k^3$ 에서 $z^2 = 25k$
 $\therefore \frac{x^2+y^2}{z^2} = \frac{9k+16k}{25k} = 1$

23. $a \geq 1, b \geq 1$ 이고 $\sqrt{a} + \sqrt{b} = 4$ 일 때, $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ 의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m 이라 할 때, $M \cdot m$ 의 값을 구하면?

- ① 1 ② $\frac{1}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ 3

해설

$a > 0, b > 0$ 이므로
 $\sqrt{a} + \sqrt{b} \geq 2\sqrt{\sqrt{a}\sqrt{b}} = 2^4\sqrt{ab}$
 $\sqrt{a} + \sqrt{b} = 4$ 이므로 $2^4\sqrt{ab} \leq 4$
 $\therefore \sqrt[4]{ab} \leq 2$
 $\therefore \sqrt{ab} \leq 4$
따라서, $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq 2\sqrt{\frac{1}{ab}} \geq \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \dots \textcircled{1}$
($\because \sqrt{ab} \leq 4$ 이므로 $\frac{1}{\sqrt{ab}} \geq \frac{1}{4}$)
한편, $a \geq 1, b \geq 1$ 이므로
 $0 < \frac{1}{a} \leq 1, 0 < \frac{1}{b} \leq 1$
 $\therefore 0 < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \leq 2 \dots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서 $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \leq 2$
 $\therefore M = 2, m = \frac{1}{2}$
 $\therefore M \cdot m = 1$

24. x 의 삼차방정식 $x^3 - ax^2 + bx - 27 = 0$ 이 세 개의 양의 실근을 갖는다.
이 때, 실수 a, b 에 대하여 a 의 최소값과 b 의 최소값의 차는?

① 6 ② 12 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

해설

세 근을 α, β, γ 라 하면

$$\alpha + \beta + \gamma = a,$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = b, \alpha\beta\gamma = 27$$

산술평균과 기하평균의 관계를 이용하면

$$a = \alpha + \beta + \gamma \geq 3\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}$$

$$= 3\sqrt[3]{27} = 9$$

$$b = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha \geq 3\sqrt{\alpha^2\beta^2\gamma^2} = 27$$

$$\therefore 27 - 9 = 18$$

25. 임의의 자연수 n 에 대하여 $(1 + \sqrt{3})^n = a_n + b_n \sqrt{3}$ (a_n, b_n 은 유리수)로 나타낼 때, $a_5^2 - 3b_5^2$ 의 값은?

① -2^5 ② -3^2 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2^5

해설

$$\begin{aligned}(1 + \sqrt{3})^n &= a_n + b_n \sqrt{3} \text{이라 하면} \\ (1 - \sqrt{3})^n &= a_n - b_n \sqrt{3} \text{의 꼴로 나타낼 수 있다.} \\ \therefore a_5^2 - 3b_5^2 &= (a_5 - b_5 \sqrt{3})(a_5 + b_5 \sqrt{3}) \\ &= (1 - \sqrt{3})^5 (1 + \sqrt{3})^5 \\ &= (-2)^5 = -2^5\end{aligned}$$