1. 다음 중 집합 $A = \{x \mid x$는 6의 약수$\}$ 의 부분집합인 것을 고르면?

① $\{0, 2\}$ ② $\{1, 4\}$ ③ $\{1, 2, 6\}$

④ $\{1, 3, 5\}$ ⑤ $\{4, 5, 6\}$

해설

$A = \{x \mid x$는 6의 약수$\} = \{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$

따라서 $\{1, 2, 6\} \subset A$ 이다.

2. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$의 부분집합 중 1은 반드시 원소로 하고 5는 원소로 하지 않는 부분집합의 개수는?

① 2개　② 4개　③ 8개　④ 16개　⑤ 32개

해설

$2^{5-1-1} = 2^3 = 8$(개)

3. 집합 A 에 대하여 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $\varnothing \subset A$ ② $A \subset A$ ③ $A \subset (A \cup B)$

④ $A \subset (A \cap B)$ ⑤ $(B \cap A) \subset B$

해설

④ $A \supset (A \cap B)$

4. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $n(A \cup B) = 35$, $n(A \cap B^c) = 11$, $n(A^c \cap B) = 13$ 일 때, $n(A \cap B)$ 의 값은?

① 9 ② 11 ③ 13 ④ 15 ⑤ 17

해설

$$n(A \cap B)$$
$$= n(A \cup B) - n(A \cap B^c) - n(A^c \cap B)$$
$$= 35 - 11 - 13 = 11$$

5. 다음 중에서 명제 '자연수 n 의 각 자리 숫자의 합이 6 의 배수이면, n 은 6 의 배수이다.'가 거짓임을 보여주는 n 의 값은?

① 30 ② 33 ③ 40

④ 42 ⑤ 답 없음

해설

실제로 주어진 명제는 참이 아니다. 33 의 경우 $3+3=6$ 이지만, 33 은 6 의 배수가 아니다.

6. 방정식 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2}$ 을 만족하는 양의 정수 x, y에 대하여 xy의 최솟값은?

① 16　　② 17　　③ 18　　④ 19　　⑤ 20

해설

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geq 2\sqrt{\frac{1}{xy}}$, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2}$ 이므로

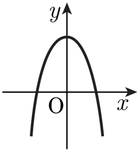
$\frac{1}{2}\geq 2\sqrt{\frac{1}{xy}}$, $\frac{1}{4}\geq\sqrt{\frac{1}{xy}}$

$\therefore\ \frac{1}{16}\geq\frac{1}{xy}$

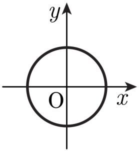
따라서 $xy\geq 16$ 이므로 xy의 최솟값은 16

7. 다음 중 함수의 그래프인 것은?

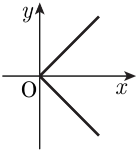
①



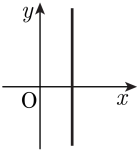
②



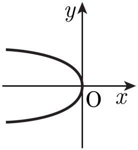
③



④



⑤



해설

함수는 하나의 x값에 여러 개의 y값이 대응될 수 없다.

8. $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y},\ x \to f(x)$라 한다. X의 임의의 두 원소를 a, b라 할 때, 다음 중에서 f가 일대일 함수일 조건은?

① $a = b$ 이면 $f(a) = f(b)$

② $f(a) = f(b)$ 이면 $a = b$

③ $f(a) \neq f(b)$ 이면 $a \neq b$

④ $a \neq b$ 이면 $f(a) = f(b)$

⑤ $a = b$ 이면 $f(a) \neq f(b)$

해설

일대일함수의 정의

「$a \neq b$ 이면, $f(a) \neq f(b)$」의 대우

9. 정수를 원소로 하는 두 집합 $A = \{a,\ b,\ c,\ d\}$, $B = \{a+k,\ b+k,\ c+k,\ d+k\}$에 대하여, $A \cap B = \{2,\ 5\}$이고, A에 속하는 모든 원소의 합이 12 , $A \cup B$에 속하는 모든 원소의 합이 33일 때, k의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

A 에 속하는 원소들의 합을 $S(A)$ 라 하면,

$S(A \cup B) = S(A) + S(B) - S(A \cap B)$,

$33 = 12 + S(B) - 7$

$\therefore\ S(B) = 28$

$= a + b + c + d + 4k$

$= 12 + 4k$

$\therefore\ 4k = 16$

$\therefore\ k = 4$

10. 전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여 $(A \cup B) - A = \varnothing$이 성립하기 위한 필요충분조건인 것은?

① $A \cap B = \varnothing$ ② $A \cap B \neq \varnothing$ ③ $A \cap B = A$

④ $A \cup B = A$ ⑤ $A \cup B = U$

해설

$(A \cup B) - A = \varnothing \Leftrightarrow A \cup B = A$

11. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 $f(2x+1) = 6x-5$를 만족시킬 때, $f(4)$의 값은 얼마인가?

① -8 ② -3 ③ 1 ④ 4 ⑤ 9

해설

$f(2x+1) = 6x-5 \cdots\cdots$ ㉠ 에서

$2x+1=4$ 를 만족시키는 x 의 값은

$x = \dfrac{3}{2}$

따라서, $x = \dfrac{3}{2}$ 을 ㉠에 대입하면,

$f(4) = 6 \times \dfrac{3}{2} - 5 = 4$

12. $x=1$일 때,

$$\frac{1}{x(x+1)}+\frac{2}{(x+1)(x+3)}+\frac{3}{(x+3)(x+6)}+\frac{4}{(x+6)(x+10)}$$ 의 값을 구하면?

① $\frac{8}{11}$ ② $\frac{10}{11}$ ③ $\frac{12}{11}$ ④ $\frac{8}{9}$ ⑤ $\frac{10}{9}$

해설

이항분리 이용

$$\frac{1}{x(x+1)}+\frac{2}{(x+1)(x+3)}+\frac{3}{(x+3)(x+6)}+\frac{4}{(x+6)(x+10)}$$

$$=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}+\frac{2}{2}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+3}\right)$$

$$+\frac{3}{3}\left(\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+6}\right)+\frac{4}{4}\left(\frac{1}{x+6}-\frac{1}{x+10}\right)$$

$$=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+10}$$

$x=1$ 대입하면 $\frac{1}{1}-\frac{1}{1+10}=1-\frac{1}{11}=\frac{10}{11}$

13. $a+\frac{1}{b}=c,\ b+\frac{1}{c}=d,\ c+\frac{1}{d}=a$일 때, ab의 값은?

① $-\frac{3}{2}$ ② -1 ③ $-\frac{1}{2}$ ④ 0 ⑤ 1

해설

$c=a+\frac{1}{b}$ 을 $b+\frac{1}{c}=d$에 대입하면

$$d=b+\frac{1}{a+\frac{1}{b}}=b+\frac{b}{ab+1}=\frac{ab^2+2b}{ab+1}$$

c와 d를 $a=c+\frac{1}{d}$에 대입하면

$$a=a+\frac{1}{b}+\frac{ab+1}{ab^2+2b} \text{ 에서 } \frac{ab+2+ab+1}{ab^2+2b}=0$$

$$\therefore \frac{2ab+3}{ab^2+2b}=0$$

따라서 $2ab+3=0$ 이므로 $ab=-\frac{3}{2}$

14. $\sqrt{12-6\sqrt{3}}$ 의 정수 부분이 a, 소수 부분이 b라 할 때, $\frac{1}{b}-a$ 의 값을 구하면?

① $1+\sqrt{3}$ ② $2+\sqrt{3}$ ③ $2-\sqrt{3}$
④ $3+\sqrt{3}$ ⑤ $3-\sqrt{3}$

해설

$\sqrt{12-6\sqrt{3}} = \sqrt{12-2\sqrt{27}} = 3-\sqrt{3}$

따라서 $a=1,\ b=2-\sqrt{3}(\because 1<\sqrt{3}<2)$

$\therefore \frac{1}{b}-a = \frac{1}{2-\sqrt{3}}-1 = 1+\sqrt{3}$

15. $x=\sqrt{\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}}$, $y=\sqrt{\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}}$ 일 때, $\dfrac{x-y}{x+y}+\dfrac{x+y}{x-y}$ 의 값을 구하면?

① $\dfrac{6\sqrt{5}}{5}$ ② $\sqrt{5}$ ③ $\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$ ④ $\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$ ⑤ $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

해설

$$x=\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}=\sqrt{\frac{6+2\sqrt{5}}{4}}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

$$y=\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}=\sqrt{\frac{6-2\sqrt{5}}{4}}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

$$\therefore x+y=\sqrt{5},\ x-y=1$$

$$\therefore \frac{x-y}{x+y}+\frac{x+y}{x-y}=\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{\sqrt{5}}{1}=\frac{6\sqrt{5}}{5}$$

16. 함수 $y = a\sqrt{x}$ 에 대하여 옳지 <u>않은</u> 것을 모두 고른 것은? (단, $a \neq 0$)

㉠ 정의역은 $\{x \mid x \geq 0\}$ 이다.
㉡ $a > 0$ 이면 제 2 사분면을 지난다.
㉢ $y = a\sqrt{-x}$ 의 그래프와 x 축에 대하여 대칭이다.

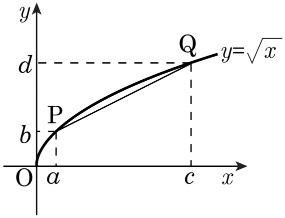
① ㉠ ② ㉡ ③ ㉠, ㉡

④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉡ $a > 0$ 이면 제 1 사분면을 지난다.
㉢ $y = a\sqrt{-x}$ 의 그래프와 y 축에 대하여 대칭이다.
따라서 옳지 않은 것은 ㉡, ㉢ 이다.

17. 함수 $y = \sqrt{x}$ 의 그래프 위의 두 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$, $\mathrm{Q}(c,\ d)$ 에 대하여 $\dfrac{b+d}{2} = 1$ 일 때, 직선 PQ 의 기울기를 구하면? (단, $0 < a < c$)



① $\dfrac{1}{5}$ ② $\dfrac{1}{4}$ ③ $\dfrac{1}{3}$

④ $\dfrac{1}{2}$ ⑤ 1

해설

두 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$, $\mathrm{Q}(c,\ d)$ 는

함수 $y = \sqrt{x}$ 의 그래프 위의 점이므로

$b = \sqrt{a},\ d = \sqrt{c}$

$\therefore\ a = b^2,\ c = d^2$

따라서 직선 PQ 의 기울기는

$\dfrac{d-b}{c-a} = \dfrac{d-b}{d^2-b^2} = \dfrac{d-b}{(d-b)(d+b)} = \dfrac{1}{d+b}$ 이고

$\dfrac{b+d}{2} = 1$ 에서 $b+d = 2$ 이므로

($\therefore$ 직선 PQ 의 기울기)$= \dfrac{1}{2}$

18. 전체집합 $\{x \mid 1 \le x \le 10,\ x \text{는 정수}\}$ 의 두 부분집합 $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $B = \{3, 4, 6\}$ 가 있다. $A \cup X = B \cup X$ 가 성립하는 U 의 부분집합 X 의 개수를 구하면?

① 16 개 ② 32 개 ③ 64 개

④ 128 개 ⑤ 256 개

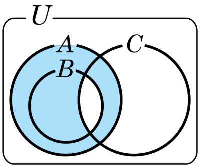
해설

$A \cup X = B \cup X$ 가 성립하려면 X 에 $A \cap B$ 의 원소는 들어 있어도 되고 들어 있지 않아도 상관없다. 그러나 그 외의 A, B 의 원소는 반드시 들어 있어야 한다. 즉 집합 X 는 $2, 3, 8, 10$ 이 모두 포함된 U 의 부분집합이다.

$\therefore \{1, 4, 5, 6, 7, 9\}$ 의 부분집합의 개수와 같다.

따라서 $2^6 = 64$(개) 이다.

19. 다음 벤 다이어그램의 색칠한 부분을 나타내는 집합은?



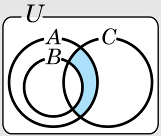
① $A-(B\cap C)$ ② $(A-B)\cap C$

③ $(A\cup B)-C$ ④ $(A\cup C)-B$

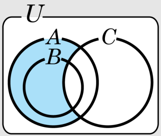
⑤ $(A\cap B)\cup C$

해설

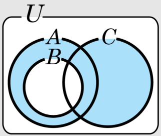
②



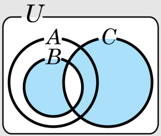
③



④



⑤



20. $[A-(A^c \cap B^c)] \cup [(C^c \cup A) \cap C] = A \cup C$ 성립할 때, 다음 중 항상 성립하는 것은?

① $C - A = C$ ② $A \cap C = A$ ③ $A \cup B = B$

④ $A^c \subset C^c$ ⑤ $B \cap C = C$

해설

$$[A-(A^c \cap B^c)] \cup [(C^c \cup A) \cap C]$$
$$= [A \cap (A^c \cap B^c)^c] \cup [(C^c \cup A) \cap C]$$
$$= [A \cap (A \cup B)] \cup [(C^c \cap C) \cup (A \cap C)]$$
$$= A \cup (A \cap C) = A$$
$$\therefore A \cup C = A \leftrightarrow C \subset A \leftrightarrow A^c \subset C^c$$

21. 함수 $f(x)$가 임의의 $x,\ y$에 대하여 $f(x)\cdot f(y)=f(x+y)+f(x-y)$를 만족시킬 때 $2f(0)+f(2)$의 값은? (단, $f(1)=1$)

① 0　　② 1　　③ 2　　④ 3　　⑤ 4

해설

$f(x)\cdot f(y)=f(x+y)+f(x-y)$ 는 임의의 $x,\ y$ 에 대하여 항상 성립하므로

$x=1,\ y=0$ 일 때 $f(1)\cdot f(0)=f(1)+f(1)$

$\therefore\ f(0)=2\ (\because\ f(1)=1)$

$x=1,\ y=1$ 일 때 $f(1)\cdot f(1)=f(2)+f(0)$ 에서 $1=f(2)+2$

$\therefore\ f(2)=-1$

$\therefore\ 2f(0)+f(2)=4-1=3$

22. $\dfrac{x(y+z)}{27} = \dfrac{y(z+x)}{32} = \dfrac{z(x+y)}{35}$ 에서 $\dfrac{x^2+y^2}{z^2}$ 의 값은? (단, x, y, z 는 모두 양수이다.)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$\dfrac{x(y+z)}{27} = \dfrac{y(z+x)}{32} = \dfrac{z(x+y)}{35} = k(k \neq 0)$ 라 하면

$xy + zx = 27k$, $zy + xy = 32k$, $zx + yz = 35k$ 이므로

$2(xy+yz+zx) = 94k$, $\quad \therefore\ xy+yz+zx = 47k$ 이므로

$yz = 20k$, $zx = 15k$, $xy = 12k$

또, $x^2 \cdot y^2 \cdot z^2 = 3600k^3$ 이므로

$x^2\ 400k^2 = 3600k^3$ 에서 $x^2 = 9k$

$225k^2 \cdot y^2 = 3600k^3$ 에서 $y^2 = 16k$

$144k^2 \cdot z^2 = 3600k^3$ 에서 $z^2 = 25k$

$\therefore\ \dfrac{x^2+y^2}{z^2} = \dfrac{9k+16k}{25k} = 1$

23. $a \geq 1,\ b \geq 1$이고 $\sqrt{a}+\sqrt{b}=4$일 때, $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$의 최댓값과 최솟값을 각각 $M,\ m$이라 할 때, $M \cdot m$의 값을 구하면?

① 1　　② $\frac{1}{2}$　　③ 2　　④ $\frac{1}{3}$　　⑤ 3

해설

$a>0,\ b>0$이므로

$$\sqrt{a}+\sqrt{b} \geq 2\sqrt{\sqrt{a}\sqrt{b}} = 2^{4}\sqrt{ab}$$

$\sqrt{a}+\sqrt{b}=4$이므로 $2^{4}\sqrt{ab} \leq 4$

$\therefore\ \sqrt[4]{ab} \leq 2$

$\therefore\ \sqrt{ab} \leq 4$

따라서, $\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \geq 2\sqrt{\frac{1}{ab}} \geq \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \cdots$ ①

($\because\ \sqrt{ab} \leq 4$이므로 $\frac{1}{\sqrt{ab}} \geq \frac{1}{4}$)

한편, $a \geq 1,\ b \geq 1$이므로

$0<\frac{1}{a} \leq 1,\ 0<\frac{1}{b} \leq 1$

$\therefore 0<\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \leq 2 \cdots$ ②

①, ②에서 $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{a}+\frac{1}{b} \leq 2$

$\therefore\ M=2,\ m=\frac{1}{2}$

$\therefore\ M \cdot m = 1$

24. x의 삼차방정식 $x^3 - ax^2 + bx - 27 = 0$이 세 개의 양의 실근을 갖는다. 이 때, 실수 a, b에 대하여 a의 최소값과 b의 최소값의 차는?

① 6 ② 12 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

해설

세 근을 α, β, γ라 하면
$\alpha + \beta + \gamma = a$,
$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = b$, $\alpha\beta\gamma = 27$
산술평균과 기하평균의 관계를 이용하면
$a = \alpha + \beta + \gamma \geq 3\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}$
$= 3\sqrt[3]{27} = 9$
$b = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha \geq 3\sqrt[3]{\alpha^2\beta^2\gamma^2} = 27$
$\therefore\ 27 - 9 = 18$

25. 임의의 자연수 n에 대하여 $(1+\sqrt{3})^n = a_n + b_n\sqrt{3}$($a_n$, b_n은 유리수)로 나타날 때, $a_5^2 - 3b_5^2$의 값은?

① -2^5 ② -3^2 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2^5

해설

$(1+\sqrt{3})^n = a_n + b_n\sqrt{3}$이라 하면

$(1-\sqrt{3})^n = a_n - b_n\sqrt{3}$의 꼴로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \therefore\ a_5^2 - 3b_5^2 &= (a_5 - b_5\sqrt{3})(a_5 + b_5\sqrt{3}) \\ &= (1-\sqrt{3})^5(1+\sqrt{3})^5 \\ &= (-2)^5 = -2^5 \end{aligned}$$