

1. 어떤 자연수 x 를 7 로 나누었더니 몫이 6 이고, 나머지는 4 보다 큰 소수였다. 자연수 x 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 47

해설

$x = 7 \times 6 + y (0 \leq y < 7)$ 이고 y 는 4 보다 큰 소수이므로 $y = 5$ 가 되어 $x = 7 \times 6 + 5 = 47$ 이다.

2. $x = 5^{15} + 1$, $y = 2^{13} + 1$ 일 때 xy 는 몇 자리의 수인지 구하여라.

▶ 답:

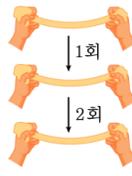
▷ 정답: 15

해설

$xy = 5^{15} \times 2^{13} + 5^{15} + 2^{13} + 1$
이 때 $5^{15} \times 2^{13} > 5^{15} + 2^{13} + 1$ 이므로
 $5^{15} + 2^{13} + 1$ 은 자릿수를 고려할 때 생각하지 않는다.
 $5^{15} \times 2^{13} = 5^{13} \times 2^{13} \times 5^2$
 $= (5 \times 2)^{13} \times 25$
 $= 10^{13} \times 25$
따라서 xy 는 15 자리의 수이다.

3. 손으로 국수를 만들 때, 반죽을 늘어 1 회 접으면 두 가닥이 되고, 2 회 접으면 네 가닥이 된다. 국수가 100 가닥 이상 필요 할 때, 최소 몇 회를 접어야 하는가?

- ① 4 회 ② 5 회 ③ 6 회
 ④ 7 회 ⑤ 8 회



해설

반죽을 1 회 접으면 2 가닥, 2 회 접으면 (2×2) 가닥, 3 회 접으면 $(2 \times 2 \times 2)$ 가닥이 된다. 접는 횟수에 따른 국수의 가닥 수를 표로 정리하면 다음과 같다.

접는 횟수	국수의 가닥 수(가닥)	국수의 가닥수를 거듭제곱으로 표현
1회	2	2^1
2회	$2 \times 2 = 4$	2^2
3회	$2 \times 2 \times 2 = 8$	2^3
4회	$2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$	2^4
5회	$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$	2^5
⋮	⋮	⋮

$2^5 = 32$, $2^6 = 64$, $2^7 = 128$, ... 이므로 국수 100 가닥을 만들려면 7 회 이상 접어야 한다.

4. 다음 중 옳지 않은 것을 모두 고르면?(정답 2 개)

- ① 15 이하의 소수는 모두 6 개이다.
- ② 7 은 소수이다.
- ③ 모든 소수는 홀수이다.
- ④ 자연수는 1, 소수, 합성수로 이루어져 있다.
- ⑤ 1 은 합성수이다.

해설

- ③ 2 는 소수이다.
- ⑤ 1 은 소수도 합성수도 아니다.

5. 다음 중 360의 소인수를 모두 구한 것은?

① 1, 2, 3

② 2, 3

③ 2

④ 3, 5

⑤ 2, 3, 5

해설

$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$ 이므로 소인수는 2, 3, 5이다.

6. 다음 수 중 어떤 자연수의 제곱이 되지 않는 수는?

- ① $2 \times 3 \times 3$ ② $2^2 \times 5^2$ ③ 16
④ $2^2 \times 3^2 \times 5^2$ ⑤ 81

해설

① 지수가 모두 짝수가 아니므로 자연수의 제곱이 되지 않는 수이다.

7. $\frac{n}{2}$ 이 어떤 자연수의 세제곱이고, $\frac{n}{3}$ 이 어떤 자연수의 제곱이 되는 자연수 n 중에서 가장 작은 것을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 432

해설

가장 작은 자연수 n 에서 $\frac{n}{2}$ 이 세제곱이므로 n 은 적어도 2 가 네 번 곱해져 있고, $\frac{n}{3}$ 이 제곱이므로 n 은 3 이 세 번 곱해져 있다.
 $\therefore n = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 = 432$

8. 504 를 자연수 a 로 나눈 값이 자연수 b 의 제곱이 될 때, $a + b$ 의 최소값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 20

해설

$$\frac{504}{a} = \frac{2^3 \times 3^2 \times 7}{a} = b^2 \text{ 이므로}$$

$a = 2 \times 7, 2^3 \times 7, 2 \times 3^2 \times 7, 504$ 가 가능하다.

$$a = 2 \times 7 \text{ 일 때, } b^2 = 6^2 \quad \therefore b = 6$$

$$a = 2^3 \times 7 \text{ 일 때, } b^2 = 3^2 \quad \therefore b = 3$$

$$a = 2 \times 3^2 \times 7 \text{ 일 때, } b^2 = 2^2 \quad \therefore b = 2$$

$$a = 504 \text{ 일 때, } b = 1$$

$$\therefore (a + b \text{의 최소값}) = 14 + 6 = 20$$

9. 자연수 n 의 소인수들의 합을 $P(n)$ 으로 나타낸다. 예를 들어, $18 = 2 \times 3^2$ 이므로 $P(18) = 2 + 3 = 5$ 이다. 이 때, $\frac{P(x)-4}{P(x)-6} = \frac{P(30)+P(60)}{P(12)+P(24)}$ 를 만족하는 x 의 값 중 두 자리 자연수를 모두 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 15

▷ 정답 : 45

▷ 정답 : 75

해설

$P(30) = 10, P(60) = 10, P(12) = 5, P(24) = 5$ 이므로

$$\frac{P(x)-4}{P(x)-6} = \frac{P(30)+P(60)}{P(12)+P(24)} \text{에서}$$

$$\frac{P(x)-4}{P(x)-6} = \frac{10+10}{5+5} = 2$$

$$P(x)-4 = 2P(x)-12$$

$$P(x) = 8$$

소인수의 합이 8인 수는 3과 5만을 소인수로 가진 수이다.

$\therefore x = 15, 45, 75$

11. $3^2 \times 5 \times 7^x$ 의 약수의 개수가 72 의 약수의 개수와 같을 때, 자연수 x 의 값은?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$72 = 2^3 \times 3^2$ 이므로 72 의 약수의 개수:

$$(3+1) \times (2+1) = 12 \text{ (개)}$$

$3^2 \times 5 \times 7^x$ 의 약수의 개수:

$$(2+1) \times (1+1) \times (x+1) = 12 \text{ (개)}$$

$$\therefore x = 1$$

12. $n \times 5^2 \times 7^4$ 의 약수의 개수가 105 개일 때, n 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 64

해설

약수의 개수는 각 인수에 1 을 더한 값의 곱이므로,
 $n = a^k$ 라 두면,
 $(k+1) \times 3 \times 5 = 105$
 $\rightarrow k+1 = 7, k = 6$
 $\therefore n$ 의 최솟값 = $2^6 = 64$

13. 다음 중 서로소인 것은?

① (3, 15)

② (22, 13)

③ (100, 45)

④ (6, 9)

⑤ (10, 12)

해설

서로소는 최대공약수가 1인 두 자연수를 말하므로 (22, 13)이다.

14. 다음 중 옳지 않은 것은?

- ① 8 과 27 은 서로소이다.
- ② 12 의 소인수는 2, 3 이다.
- ③ 소수의 약수의 개수는 2 개이다.
- ④ 60 의 소인수는 3 개이다.
- ⑤ 두 홀수는 서로소이다.

해설

⑤ 반례: 두 홀수 3, 9 는 최대공약수가 3 이므로 서로소가 아니다.

15. 어느 두 자연수의 최대공약수가 15 일 때, 두 수의 공약수가 아닌 것은?

- ① 2 ② 3 ③ 5 ④ 15 ⑤ 1

해설

공약수는 최대공약수의 약수이므로 1, 3, 5, 15 이다.

16. $2^2 \times 3^4$, $2^2 \times 3^2 \times 5$ 의 공약수의 개수는?

- ① 4 ② 6 ③ 8 ④ 9 ⑤ 12

해설

$2^2 \times 3^4$, $2^2 \times 3^2 \times 5$ 의 최대공약수는 $2^2 \times 3^2$
공약수는 최대공약수의 약수이므로,
1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36 총 9개이다.

17. 세 자연수 a, b, c 의 최대공약수를 $[a, b, c]$ 로 정의한다. x 는 100 이하의 자연수라 할 때, $[x, 105] = k, k = [a, b, c]$ 이고, $[a, b] = 6, [b, c] = 9, [c, a] = 21$ 이다. 이 때, x 의 개수를 구하여라.

▶ 답: 개

▷ 정답: 23개

해설

$[a, b] = 6, [b, c] = 9, [c, a] = 21$ 이므로, $[a, b, c] = 3$ 이다.
 $[x, 105] = 3$ 이 되려면 x 는 3의 인수를 가지면서 5와 7의 인수를 가지면 안 된다.
따라서 x 는 100 이하의 수 중 3의 배수이면서 5의 배수이거나 7의 배수가 아닌 수이다.
이것은 3의 배수의 개수를 구한 후 15의 배수와 21의 배수를 빼면 된다.
 $\therefore 33 - 6 - 4 = 23$

18. 두 수 $2 \times 3 \times 5^m$, $2 \times 3^2 \times 5 \times 7^2$ 의 최소공배수가 $2^a \times 3^b \times 5^2 \times 7^c$ 일 때, \square 안에 알맞은 숫자들의 곱을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$2 \times 3 \times 5^m$, $2 \times 3^2 \times 5 \times 7^2$ 의 최소공배수를 구하면 $2 \times 3^2 \times 5^m \times 7^2$ 이다.

또, $2 \times 3 \times 5^m$, $2 \times 3^2 \times 5 \times 7^2$ 의 최소공배수가 $2^a \times 3^b \times 5^2 \times 7^c$ 이므로 위에서 구한 최소공배수와 비교해 보면 $2 \times 3^2 \times 5^2 \times 7^2$ 이다.

따라서 \square 안에 들어가는 수는 차례대로 2, 1, 2, 2 이고, 구하는 값은 8 이다.

19. 1000 이하의 자연수 중 $2^3 \times 3$ 과 2×3^2 의 공배수의 개수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

$2^3 \times 3$ 과 2×3^2 의 최소공배수는 $2^3 \times 3^2 = 72$ 이다.

$\therefore 1000 \div 72 = 13 \cdots 64$

따라서 13개이다.

20. $6 \times x$, $8 \times x$, $10 \times x$ 의 최소공배수가 720 이라고 할 때, x 의 값은 얼마인가? (단, x 는 한 자리의 자연수이다.)

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

해설

$2 \times 3 \times x$, $2^3 \times x$, $2 \times 5 \times x$ 의 최소공배수는 $2^3 \times 3 \times 5 \times x = 720 = 2^4 \times 3^2 \times 5$ 이다.
 $\therefore x = 2 \times 3 = 6$

21. 어느 꽃집에서 빨간 장미 24 송이, 백장미 60 송이, 노란 장미 52 송이를 똑같이 나누어 가능한 많은 꽃다발로 포장하려고 한다. 몇 개의 꽃다발로 포장할 수 있겠는가?

- ① 3 다발 ② 4 다발 ③ 8 다발
④ 12 다발 ⑤ 16 다발

해설

똑같이 나누어 포장하려면 꽃다발 수는 24, 60, 52의 공약수이어야 하고, 가능한 많은 꽃다발을 포장하려고 하므로 24, 60, 52의 최대공약수이어야 한다.

$$4 \overline{) \begin{array}{r} 24 \quad 60 \quad 52 \\ 6 \quad 15 \quad 13 \end{array}} \therefore 4 \text{다발}$$

23. 가로, 세로의 길이가 각각 100m, 80m 인 직사각형 모양의 꽃밭의 가장자리에 일정한 간격으로 나무를 심으려고 한다. 네 모퉁이에는 반드시 나무를 심어야 하고, 나무를 가능한 한 적게 심으려고 할 때, 필요한 나무의 그루수는?

- ① 10 그루 ② 12 그루 ③ 14 그루
④ 16 그루 ⑤ 18 그루

해설

나무 사이의 간격을 x (m)라 할 때,
 $100 = x \times \square$, $80 = x \times \Delta$
 x 는 100 과 80 의 최대공약수이므로
 $100 = 2^2 \times 5^2$, $80 = 2^4 \times 5$
 $\therefore x = 2^2 \times 5 = 20$ (m)
나무 사이의 간격을 20m 라 할 때,
가로 $100 = 20(\text{m}) \times 5$ (그루)
세로 $80 = 20(\text{m}) \times 4$ (그루)
직사각형 모양의 꽃밭의 가장자리에 필요한 나무 그루수는
 $(5 + 4) \times 2 = 18$ (그루)

24. 어떤 수 a 로 214, 916, 151, 448 을 나누었더니 그 나머지가 b 로 같을 때, a, b 의 값으로 알맞은 짝은 몇 개인가?

- ① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

214, 916, 151, 448을 a 로 나눈 몫을 Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 라 할 때
 $214 = aQ_1 - b,$
 $916 = aQ_2 - b,$
 $151 = aQ_3 - b,$
 $448 = aQ_4 - b$ 이다.
 $214 - 151 = 63 = a(Q_1 - Q_3)$ 이므로
63은 a 로 나누어 떨어진다.
마찬가지의 방법으로 두 수의 차
 $916 - 214, 448 - 214, \dots$ 는 a 로 나누어 떨어진다.
63, 234, 297, 468, 702, 765의 최대공약수는 9이므로
가능한 a 는 3, 9이다. $a = 3$ 일 때, $b = 1$
 $a = 9$ 일 때, $b = 7$
 (a, b) 의 순서쌍은 (3, 1), (9, 7)로 2개이다.

25. A와 B가 함께 일자리를 구했다. A는 4일간 일하고 하루 쉬고, B는 5일간 일하고 이틀간 쉬기로 하였다. 이와 같이 180일간 일한다면, 두 사람이 같이 쉬는 일수는?

- ① 5일 ② 10일 ③ 15일 ④ 20일 ⑤ 35일

해설

5와 7의 최소공배수는 35,
35일 동안 B가 쉬는 날은 6, 7, 13, 14, 20, 21, 27, 28, 34, 35일,
이 중에 A가 쉬는 날은 20, 35일
따라서 180일 동안 두 사람이 함께 쉬는 날은
 $2 \times 5 = 10$ (일)이다.

26. 가로, 세로의 길이가 각각 12 cm, 20 cm 인 직사각형 모양의 카드를
늘어 놓아 가장 작은 정사각형을 만들려고 한다. 이때, 카드는 총 몇
장이 필요한가?

- ① 10 장 ② 12 장 ③ 13 장 ④ 15 장 ⑤ 17 장

해설

정사각형의 한 변의 길이는 12 와 20 의 최소공배수인 60 cm
이다. 가로는 $60 \div 12 = 5$ (장), 세로는 $60 \div 20 = 3$ (장)이
필요하므로 필요한 카드의 수는 $5 \times 3 = 15$ (장)이다.

27. 세 자연수 2, 5, 8 의 어느 것으로 나누어도 1 이 남는 가장 작은 자연 수를 구하면?

- ① 2 ② 16 ③ 21 ④ 41 ⑤ 80

해설

구하는 수는 (2, 5, 8 의 공배수)+1 인 수 중 가장 작은 자연수 이다. 2, 5, 8 의 최소공배수는 40 이다.
 $\therefore 40 + 1 = 41$

28. 두 자연수 A, B 에서 $A \times B$ 의 값이 1440 이고, 최대공약수가 12 일 때, 차가 가장 작은 두 자연수의 합은?

- ① 11 ② 36 ③ 72 ④ 84 ⑤ 108

해설

최소공배수를 L 이라 하면 $1440 = 12 \times L$ 이므로 $L = 120$

$$12) \frac{A}{a} \quad \frac{B}{b}$$

$$12 \times a \times b = 120$$

$a \times b = 10$ (단, a, b 는 서로소)

$A = 12 \times a, B = 12 \times b$ 이고 $A > B$ 라 하면

$$a = 10, b = 1 \text{ 또는 } a = 5, b = 2$$

(i) $a = 10, b = 1$ 일 때

$$A - B = 10 \times 12 - 1 \times 12 = 108$$

(ii) $a = 5, b = 2$ 일 때

$$A - B = 5 \times 12 - 2 \times 12 = 36$$

따라서, 차가 가장 작은 두 자연수는 60, 24 이다.

29. 1에서 100까지 자연수를 다음과 같이 연속한 세 개의 수씩 묶어 차례로 늘어놓았다. 이 때, 세 수의 합이 12의 배수인 것은 모두 몇 쌍인가?

(1, 2, 3), (2, 3, 4), (3, 4, 5), \dots , (98, 99, 100)

- ① 19쌍 ② 24쌍 ③ 30쌍 ④ 32쌍 ⑤ 36쌍

해설

세 수는 $n-1, n, n+1$ 로 이루어져 있으므로 세 수의 합은 $3 \times n$, 12의 배수가 되기 위해서 n 은 4의 배수가 되어야 한다. 즉 가운데 수가 4의 배수인 쌍의 갯수는 $96 = 4 \times 24$ 개이다.

30. 어떤 분수에 $\frac{20}{9}$, $\frac{25}{12}$ 의 어느 것을 곱하여도 그 결과는 자연수라고 한다. 이를 만족하는 분수 중 가장 작은 분수를 A 라 할 때, $A \times \frac{20}{9}$ 을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 16

해설

구하려는 분수를 $A = \frac{b}{a}$ 라고 하자.

$$\frac{20}{9} \times \frac{b}{a} = (\text{자연수}) \rightarrow \begin{cases} b \text{는 } 9 \text{의 배수} \\ a \text{는 } 20 \text{의 약수} \end{cases}$$

$$\frac{25}{12} \times \frac{b}{a} = (\text{자연수}) \rightarrow \begin{cases} b \text{는 } 12 \text{의 배수} \\ a \text{는 } 25 \text{의 약수} \end{cases}$$

즉, $\frac{b}{a} = \frac{(9, 12 \text{의 공배수})}{(20, 25 \text{의 공약수})} \dots \textcircled{1}$ 이다.

$\textcircled{1}$ 을 만족하는 가장 작은 분수

$$\frac{b}{a} = \frac{(9, 12 \text{의 최소공배수})}{(20, 25 \text{의 최대공약수})}$$

$$\therefore A = \frac{b}{a} = \frac{36}{5}$$

따라서 $A \times \frac{20}{9} = \frac{36}{5} \times \frac{20}{9} = 4 \times 4 = 16$ 이다.