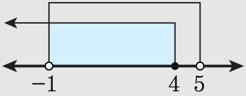
1. 연립부등식 $\begin{cases} 2x \le x+4 \\ x^2-4x-5<0 \end{cases}$ 을 만족시키는 정수 x의 개수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5 개

해설

㉠ $2x \le x+4$,
$\therefore x \le 4$
㉡ $x^2-4x-5<0$
$\Rightarrow (x-5)(x+1)<0$
$\therefore -1<x<5$



㉠, ㉡의 범위의
공통범위는 $-1<x\le 4$
$\therefore x=0,1,2,3,4$ 총 5 개

2. 두 점 $A(1), B(5)$에 대하여 선분 AB를 $3:1$로 내분하는 점 P와 선분 AB를 $3:1$로 외분하는 점 Q 사이의 거리를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$$\frac{3\times5+1\times1}{3+1}=4$$

$\therefore\ P(4)$

$$\frac{3\times5-1\times1}{3-1}=7$$

$\therefore\ Q(7)$

$\therefore\ \overline{PQ}=|7-4|=3$

3. 직선 $2x+4y+1=0$에 평행하고, 두 직선 $x-2y+10=0$, $x+3y-5=0$의 교점을 지나는 직선을 $y=ax+b$라 할 때 $2a+b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

직선 $2x+4y+1=0$의 기울기는

$y=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}$ 에서 $-\frac{1}{2}$

또, $x-2y+10=0$, $x+3y-5=0$을 연립하여 풀면

$x=-4,\ y=3$

$y-3=-\frac{1}{2}(x+4)$

$\therefore y=-\frac{1}{2}x+1$이므로

$a=-\frac{1}{2}$, $b=1$

$\therefore\ \ 2a+b=0$

4. x의 모든 값에 대하여 다음 등식이 성립할 때, 상수 a, b, c의 값의 합을 구하여라.

$$x^3+1=(x-1)(x-2)(x-3)+a(x-1)(x-2)+b(x-1)+c$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 15

해설

x에 대한 항등식이므로
$x=1$일 때, $2=c\cdots\cdots$ ㉠
$x=2$일 때, $9=b+c\cdots\cdots$ ㉡
$x=3$일 때, $28=2a+2b+c\cdots\cdots$ ㉢
㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=6,\ b=7,\ c=2$
$\therefore\ a+b+c=15$

5. $(x+2)(x-3)(x+6)(x-9)+21x^2$을 인수분해하면 $(x^2+p)(x^2+qx-18)$이다. pq의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 72

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= \{(x+2)(x-9)\}\{(x-3)(x+6)\}+21x^2 \\ &= (x^2-7x-18)(x^2+3x-18)+21x^2 \\ &= \{(x^2-18)-7x\}\{(x^2-18)+3x\}+21x^2 \\ &= (x^2-18)^2-4x(x^2-18)-21x^2+21x^2 \\ &= (x^2-18)(x^2-4x-18)\end{aligned}$$

따라서 $p=-18,\ g=-4$

$\therefore pg=(-18)\times(-4)=72$

6. $\sqrt{21 \cdot 22 \cdot 23 \cdot 24 + 1}$은 자연수이다. 이 때, 각 자리의 수의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$x = 21$이라 하면

$\sqrt{21 \cdot 22 \cdot 23 \cdot 24 + 1}$

$= \sqrt{x(x+1)(x+2)(x+3)+1}$

$= \sqrt{\{x(x+3)\}(x+1)(x+2)+1}$

$= \sqrt{(x^2+3x)(x^2+3x+2)+1}$

$= \sqrt{(x^2+3x)^2+2(x^2+3x)+1}$

$= \sqrt{\{(x^2+3x)+1\}^2}$

$= x^2+3x+1 \ (\because (x^2+3x)+1>0)$

$= 21^2+3 \cdot 21+1 = 505$

각자리 숫자의 합은 $5+0+5=10$

7. 복소수 $z = \dfrac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}$ 에 대하여 $(3z^2+z)^2+(z^2+3z)^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$z = \frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i} = \frac{(1+\sqrt{3}i)^2}{(1-\sqrt{3}i)(1+\sqrt{3}i)} = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$$

$$z^2 = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$$

$$(3z^2+z)^2+(z^2+3z)^2$$
$$= \left(\frac{-3-3\sqrt{3}i-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2 + \left(\frac{-1-\sqrt{3}i-3+3\sqrt{3}i}{2}\right)^2$$
$$= (-2-\sqrt{3}i)^2+(-2+\sqrt{3}i)^2$$
$$= 4+4\sqrt{3}i-3+4-4\sqrt{3}i-3 = 2$$

해설

$$z = \frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i} = \frac{(1+\sqrt{3}i)^2}{(1-\sqrt{3}i)(1+\sqrt{3}i)} = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$$

에서 양변에 2를 곱하고 -1 을 우변으로 이항하면 $2z+1 = \sqrt{3}i$

양변을 제곱하면

$4z^2+4z+1 = -3$

$\rightarrow 4z^2+4z+4 = 0$

$\rightarrow z^2+z+1 = 0$

$\rightarrow (z-1)(z^2+z+1) = 0$

$\rightarrow z^3-1 = 0$

$\rightarrow z^3 = 1$

※방정식에 익숙한 학생들은

$z = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 에서 바로 $z^2+z+1=0$ 와 $z^3=1$ 을 도출할 수 있을 것이다.

$(3z^2+z)^2+(z^2+3z)^2$

$= 10z^4+12x^3+10z^2$

$= (10z^4+10z^3+10z^2)+2z^3$

$= 10z^2(z^2+z+1)+2z^3$

$= 0+2$

$= 2$

8. m은 양의 정수이고, x에 관한 이차방정식 $x^2-(3+\sqrt{2})x+m\sqrt{2}-4=0$의 한 근은 정수이다. 이 때, m의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

정수근을 α라 하자

$\alpha^2-(3+\sqrt{2})\alpha+m\sqrt{2}-4=0$

$(m-\alpha)\sqrt{2}+\alpha^2-3\alpha-4=0$

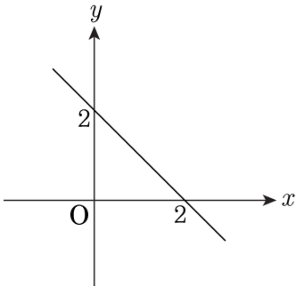
$m=\alpha$ 그리고 $\alpha^2-3\alpha-4=0$

$(\alpha+1)(\alpha-4)=0$

$\alpha=-1$ 또는 $\alpha=4$

m이 양의 정수이므로 $\alpha=4$에서 $m=4$

9. 다음 그림은 일차함수 $y = ax + b$ 의 그래프이다. 이차함수 $y = \frac{1}{2}ax^2 + bx + 3$ 의 그래프의 최댓값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

기울기 $a = -1$, y 절편 $b = 2$

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2}ax^2 + bx + 3 \\ &= -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 3 \\ &= -\frac{1}{2}(x-2)^2 + 5 \end{aligned}$$

$x = 2$ 일 때, 최댓값은 5 이다.

10. 길이가 20m 인 철망을 이용하여 벽을 한 면으로 하는 직사각형 모양의 가축 우리를 만들려고 한다. 가축 우리의 넓이가 최대가 되도록 만들 때, 그 넓이를 구하여라.

▶ 답 : ______ m^2

▷ 정답 : 50 m^2

해설

가축 우리의 세로의 길이를 x m 라고 하면
가로의 길이는 $(20-2x)$ m 이다.
가축 우리의 넓이를 y m^2 라고 하면

$$y = x(20-2x) = -2x^2 + 20x$$
$$= -2(x-5)^2 + 50$$

한편, $x > 0$ 이고 $20 - 2x > 0$ 이므로
$0 < x < 10$
따라서 $x = 5$ 일때
가축 우리의 최대 넓이는 $50\,m^2$ 이다.

11. 사차방정식 $x^4+x^3+2x^2+x+1=0$을 만족하는 모든 근의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$x^4+x^3+2x^2+x+1=0$의 양변을
x^2으로 나누면

$x^2+x+2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=0$

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(x+\frac{1}{x}\right)=0$

$x+\frac{1}{x}=t$로 치환하면

$t^2+t=0,\ t(t+1)=0$

$\therefore\ t=0$ 또는 $t=-1$

(i) $x+\frac{1}{x}=0$일 때, $x^2+1=0$

$\therefore x=\pm i$

(ii) $x+\frac{1}{x}=-1$일 때,

$x^2+1=-x,\ x^2+x+1=0$

$\therefore\ x=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 근은

$x=\pm i$ 또는 $x=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

$\therefore\ (-i)+i+\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}+\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}=-1$

12. x, y가 정수일 때 방정식 $xy-x-2y-2=0$을 만족하는 순서쌍 (x, y)의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ____________ 개

▷ 정답 : 6 개

해설

$xy-x-2y-2+4=4$

$x(y-1)-2(y-1)=(x-2)(y-1)=4$

따라서

$x-2=1$, $y-1=4$일 때, $x=3$, $y=5$

$x-2=2$, $y-1=2$일 때, $x=4$, $y=3$

$x-2=4$, $y-1=1$일 때, $x=6$, $y=2$

$x-2=-1$, $y-1=-4$일 때, $x=1$, $y=-3$

$x-2=4$, $y-1=-1$일 때, $x=6$, $y=0$

$x-2=1$, $y-1=4$일 때, $x=3$, $y=5$

따라서 순서쌍은 $(3, 5)$, $(4, 3)$, $(6, 2)$, $(1, -3)$, $(6, 0)$, $(3, 5)$로 모두 6개이다.

13. 2 년 전의 A 와 B 의 임금은 서로 같았으나 그 해 A 의 임금은 8% 인상되었고, 작년에는 다시 47% 인상되었다. 반면 B의 임금은 2 년 전과 작년의 임금 인상률이 모두 a% 로 일정했다. 두 사람의 올해 임금이 서로 같을 때, a 의 값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 26

해설

2 년 전 두 사람의 임금을 k 원이라면

올해 A 와 B 의 임금은 각각

A : $k(1+0.08)(1+0.47)$

B : $k\left(1+\dfrac{a}{100}\right)^2$

따라서

$(100+a)^2 = 108\times147 = 3\times3\times6\times6\times7\times7$

$\therefore\ 100+a=126$

$\therefore a=26$

14. x에 대한 방정식 $x^2-2kx+(2k^2-3k)=0$의 두 실근을 α,β라 할 때, $(\alpha-\beta)^2 \le 8$를 만족하는 k의 최댓값과 최솟값을 각각 M,m이라 할 때, $M+m$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$x^2-2kx+(2k^2-3k)=0$의 두 실근을
α,β라 하면

$$\frac{D}{4}=k^2-(2k^2-3k)\ge 0$$

$\therefore\ 0\le k\le 3\cdots$①

또, $\alpha+\beta=2k,\ \alpha\beta=2k^2-k$이므로

$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\le 8$

$(2k)^2-4(2k^2-3k)\le 8$

$k^2-3k+2\ge 0\quad (k-1)(k-2)\ge 0$

$\therefore\ k\le 1,\quad k\ge 2\cdots$②

①,②에서 $0\le k\le 1$ 또는 $2\le k\le 3$

$\therefore\ M=3,\quad m=0$

$\therefore\ M+m=3$

15. 평행사변형 ABCD 의 두 대각선의 교점을 M 이라하자. 두 점 A, C 의 좌표는 각각 $\mathrm{A}(-2, 6), \mathrm{C}(4, 0)$ 이고, 삼각형 MBC 의 무게중심은 원점이다. 점 D 의 좌표를 (a, b) 라고 할 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

점 M은 선분 AC의 중점이므로

M의 좌표는 $\left(\dfrac{-2+4}{2}, \dfrac{6+0}{2}\right) = (1, 3)$.

삼각형 MBC의 무게중심은 원점이므로

점 B의 좌표를 (c, d) 라고 하면

$\dfrac{1+c+4}{3} = 0$ 에서 $c = -5$

$\dfrac{3+d+0}{3} = 0$ 에서 $d = -3$

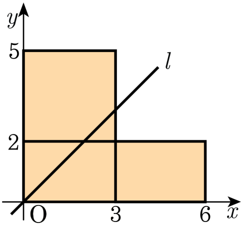
따라서 점 B의 좌표는 $(-5, -3)$ 이다. 점 M은 선분 BD의 중점이므로

$\dfrac{-5+a}{2} = 1$ 에서 $a = 7$

$\dfrac{-3+b}{2} = 3$ 에서 $b = 9$

$\therefore a+b = 16$

16. 다음 그림에서 색칠한 부분의 넓이를 원점을 지나는 직선 l이 이등분할 때, 직선 l의 기울기를 구하면?

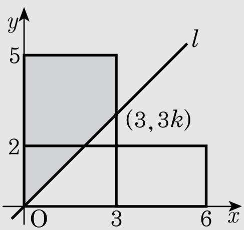


▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

직선 l을 $y = kx$라 하자.



위의 그림에서 전체넓이는 $3 \cdot 5 + (6 - 3) \cdot 2 = 21$이고

어두운 부분의 넓이는 $\{5 + (5 - 3k)\} \cdot 3 \cdot \frac{1}{2}$이다.

직선l이 전체 넓이를 이등분하므로

$\frac{21}{2} = \frac{3(10 - 3k)}{2}$, $k = 1$

$\therefore$ 기울기는 1

17. xy 평면 위의 세 개의 직선 $l_1 : x-y+2=0,\ l_2 : x+y-14=0,\ l_3 :$ $7x-y-10=0$ 으로 둘러싸인 삼각형에 내접하는 원의 중심이 (a,b) , 반지름이 r 일 때, $a+b+r^2$ 의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

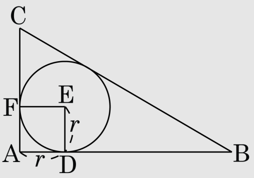
해설

세 직선의 교점을 각각 A, B, C 라 하자. 세 직선 중 두 개의 직선을 각각 연립하여 세 점의 좌표를 구한다.

$\mathrm{A}=(6,8)\quad \mathrm{B}=(2,4)\quad \mathrm{C}=(3,11)$

$\overline{\mathrm{AB}}=4\sqrt{2},\ \overline{\mathrm{BC}}=5\sqrt{2},\ \overline{\mathrm{CA}}=3\sqrt{2}$

즉, $\angle\mathrm{CAB}=90°$ 인 직각 삼각형이다.



$\Rightarrow\ 3\sqrt{2}-r+4\sqrt{2}-r=5\sqrt{2}\ \therefore\ \ r=\sqrt{2}$

$\therefore$ 점 D는 $\overline{\mathrm{AB}}$ 의 $1:3$ 의 내분점이므로,

$$\mathrm{D}=\left(\frac{2+18}{4},\frac{4+24}{4}\right)=(5,7)$$

점 F 는 $\overline{\mathrm{AC}}$ 의 $1:2$ 의 내분점이므로,

$$\mathrm{F}=\left(\frac{3+12}{3},\frac{11+16}{3}\right)=(5,9)$$

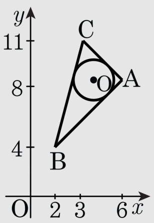
□ADEF 는 정사각형이므로 $\overline{\mathrm{AF}}\,//\,\overline{\mathrm{DE}}$ 이다.

점 A 에서 점 F 로의 이동이 x 축으로 -1 , y 축으로 $+1$ 만큼 평행이동이고,

점 D 에서 점 E 로 의 이동도 마찬가지이다.

$\therefore\ \mathrm{E}=(5-1,7+1)=(4,8)\Rightarrow\ \ a+b+r^2=4+8+(\sqrt{2})^2=14$

해설



직선들의 세 교점을 각각 A, B, C 라고 하고 이들의 좌표를 구해보면 A(6,8), B(2,4), C(3,11)

원의 중심의 좌표 O(a, b) 이므로

$2<a<6,\ 4<b<11\cdots$ ㉠

원의 중심으로부터 각 직선에 이르는 거리는 같으므로

$$\frac{|a-b+2|}{\sqrt{2}}=\frac{|a+b-14|}{\sqrt{2}}=\frac{|7a-b-10|}{5\sqrt{2}}=r\cdots\text{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 ㉠의 조건을 만족시키는 $a,\ b$ 의 해는 $a=4,\ b=8$ 이고

다시 ㉡에 대입하면,$r=\sqrt{2}$, $\therefore\ a+b+r^2=14$

18. 원 $x^2+y^2-6x-2y+6=0$ 과 직선 $3x+4y-a=0$이 서로 접할 때, 모든 a 값의 합을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 26

해설

원의 방정식을 표준형으로 바꾸면
$(x-3)^2+(y-1)^2=2^2$
원의 중심 $(3,1)$ 에서 직선까지의 거리 d가 2이면 접하므로
$$d=\frac{|3\cdot 3+4\cdot 1-a|}{\sqrt{3^2+4^2}}=2$$
$\therefore\ |13-a|=10 \Leftrightarrow 13-a=\pm 10$
따라서, $a=3$ 또는 23 이므로
모든 a 값들의 합은 26

19. 직선 $x + 2y - 3 = 0$ 을 x 축에 대하여 대칭이동한 후 다시 $y = x$ 에 대하여 대칭이동 하였더니, 원 $(x-1)^2 + (y-a)^2 = 1$ 의 넓이를 이등분하였다. 이 때, a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 5$

해설

$x + 2y - 3 = 0 \Rightarrow x - 2y - 3 = 0$($x$ 축 대칭이동)

$\Rightarrow \quad y - 2x - 3 = 0$ ($y = x$ 대칭이동)

원의 넓이를 이등분하려면, 원의 중심이 직선 위에 있으면 된다.

따라서 중심의 좌표를 직선에 대입한다.

$\therefore\ a - 2 - 3 = 0 \quad \therefore\ a = 5$

20. 점 P 를 x축에 대해 대칭이동하고, x축 방향으로 -2만큼, y축 방향으로 3만큼 평행이동한 후, 다시 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이동하였더니 점 P와 일치하였다. 점 P의 좌표를 (x, y)라 할 때, $x+y$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$\mathrm{P}(a, b)$를 x축에 대해 대칭이동 $\Rightarrow (a, -b)$,

x축으로 -2만큼, y축으로 3만큼 평행이동

$\Rightarrow (a-2, -b+3)$

$y=-x$ 에 대해 대칭이동 $\Rightarrow (b-3, -a+2)$

다시 점P와 일치하므로

$b-3=a, -a+2=b$ 에서

$a-b=-3 \quad \cdots\cdots ㉠$

$a+b=\ \ 2 \quad \cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면, $a=-\frac{1}{2},\ b=\frac{5}{2}$

$\therefore\ \mathrm{P}\left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$