1. 다항식 $5xy-yx^2+2x^3+2yz^2$에 대한 설명 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① x의 계수는 $5y$이다.
② x^2의 계수는 $-y$이다.
③ x에 대한 3차식이다.
④ x에 대한 상수항은 $2yz^2$이다.
⑤ y, z에 대한 2차식이다.

해설

y, z에 대한 3차식이다.

2. $A = 4xy^2 - 2x^2y + 3x^2y^2$, $B = x^2y - 3x^2y^2 - 2xy^2$ 일 때, $A + 2B$ 를 간단히 하면?

① xy^2 ② x^2y ③ x^2y^2

④ $-2xy^2$ ⑤ $-3x^2y^2$

해설

$A + 2B$

$= (4xy^2 - 2x^2y + 3x^2y^2) + (2x^2y - 6x^2y^2 - 4xy^2)$

$= -3x^2y^2$

해설

3. $\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{3}$ 을 만족하는 모든 실수 $x,\ y$에 대하여 항상 $ax+by+5 = 0$이다. 이때 $a+b$의 값을 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{3} = t$라 하면

$x = 2t-1,\ y = 3t+1$

이것을 $ax+by+5=0$에 대입하면

$a(2t-1)+b(3t+1)+5=0$

$(2a+3b)t+(-a+b+5)=0$

이 식이 모든 실수 t에 대하여 성립해야 하므로

$2a+3b=0\cdots$①

$-a+b+5=0\cdots$②

①, ②를 연립하여 풀면

$a=3,\ b=-2 \quad \therefore\ a+b=3+(-2)=1$

해설

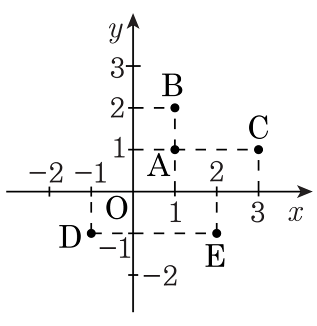
$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \Leftrightarrow AD = BC$ 성질 이용

$3x+3=2y-2$

$3x-2y+5=0$은 $ax+by+5=0$

$\therefore a=3,\ b=-2$

4. $z = a+bi$ 에서 실수 부분은 x 좌표, 허수 부분은 y 좌표라 하고, 좌표평면 위에 복소수를 순서쌍으로 표시한다고 하자. $\dfrac{1+2i}{i}$ 를 좌표평면에 표시하였을 때의 점을 고르면?



① A ② B ③ C ④ D ⑤ E

해설

$\dfrac{1+2i}{i} = \dfrac{(1+2i)i}{i \cdot i} = \dfrac{i-2}{-1} = 2-i$ 이므로
좌표를 (실수부, 허수부) 라 하면 $(2, -1)$ 이므로
주어진 좌표는 E 이다.

5. 이차방정식 $2x^2 - 2x + 3 = 0$의 두 근을 구하면?

① $-1 \pm \sqrt{5}i$　② $1 \pm \sqrt{5}$　③ $\frac{-1 \pm \sqrt{5}i}{2}$
④ $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$　⑤ $\frac{1 \pm \sqrt{5}i}{2}$

해설

$2x^2 - 2x + 3 = 0$에서

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 2\times3}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}i}{2}$$

6. 이차방정식 $2x^2 - 4x - 1 = 0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\alpha^3 + \beta^3$의 값은?

① 1 ② 3 ③ 4 ④ 8 ⑤ 11

해설

근과 계수와의 관계에 의하여

$\alpha + \beta = 2, \alpha\beta = -\frac{1}{2}$

$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$

$= 8 - 3 \times (-\frac{1}{2}) \times 2 = 11$

7. 이차함수 $y = x^2 - 4x - 7$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -11

해설

$y = x^2 - 4x - 7$
$= (x-2)^2 - 11$
$x = 2$ 일 때, 최솟값 -11 을 갖는다.

8. $\frac{2x+1}{x^3-1}=\frac{a}{x-1}+\frac{bx+c}{x^2+x+1}$가 $x \neq 1$인 모든 실수 x에 대해 항상 성립 하도록 $a,\ b,\ c$를 구할 때, $a+b+c$의 값은?

① 2　② -2　③ 1　④ -1　⑤ 0

해설

우변의 분모를 통분하면

$$\frac{a(x^2+x+1)+(bx+c)(x-1)}{x^3-1}$$

$$=\frac{(a+b)x^2+(a-b+c)x+(a-c)}{x^3-1}$$

$$\therefore\ \frac{2x+1}{x^3-1}=\frac{(a+b)x^2+(a-b+c)x+(a-c)}{x^3-1}$$

분자의 계수를 비교하면

$a+b=0,\ a-b+c=2,\ a-c=1$

세 식을 연립하여 풀면 $a=1,\ b=-1,\ c=0$

$\therefore a+b+c=0$

9. 다항식 $f(x) = x^3 + ax^2 + 3$을 일차식 $x-1$로 나누어 떨어지도록 a의 값을 정하면?

① -2 ② -4 ③ -6 ④ -8 ⑤ -10

해설

$f(1) = 1 + a + 3 = 0$, $a = -4$

10. $a^2b+b^2c-b^3-a^2c$을 인수분해하면?

① $(a+b)(a-b)(b+c)$ ② $(a-b)(b-c)(c+a)$

③ $(a-b)(a+b)(b-c)$ ④ $(a-b)(a+b)(c-a)$

⑤ $(a-b)(b+c)(c-a)$

해설

$a^2b+b^2c-b^3-a^2c$

$=a^2(b-c)-b^2(b-c)$

$=(a-b)(a+b)(b-c)$

11. $x^4+3x^2+4=(x^2+x+2)(x^2+ax+b)$ 일 때, 상수 a, b 의 곱을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -2

해설

(좌 변) $=(x^2+2)^2-x^2$

$=(x^2+x+2)(x^2-x+2)$

$\therefore\ a=-1,\ b=2$

$\therefore ab=-1\times 2=-2$

12. x^3-4x^2+x+6을 인수분해하면 $(x+a)(x+b)(x+c)$이다. $a^2+b^2+c^2$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

$f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$이라 놓으면,
$x = -1$일 때, $-1 - 4 - 1 + 6 = 0$
따라서, $f(x)$는 $(x+1)$로 나누어 떨어진다.
즉, $f(x)$는 $(x+1)$의 인수를 갖는다.
즉, $f(x) = (x+1)Q(x)$꼴
$Q(x)$는 조립제법으로 구한다.

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -4 & 1 & 6 \\ & & -1 & 5 & -6 \\ \hline & 1 & -5 & 6 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x) = (x^2 - 5x + 6)(x+1)$
$\therefore\ f(x) = (x-3)(x-2)(x+1)$
$\therefore\ a^2 + b^2 + c^2 = (-3)^2 + (-2)^2 + 1^2 = 14$

13. 그래프의 모양이 $y=-2x^2$ 과 같고 $x=1$ 일 때 최댓값 5 를 갖는다. 이때, 이 함수의 식은?

① $y=-2x^2-4x+4$
② $y=-2x^2-4x+5$
③ $y=-2x^2+4x-3$
④ $y=-2x^2+4x+3$
⑤ $y=-2x^2-x+5$

해설

꼭짓점의 좌표가 $(1,\ 5)$, x^2 의 계수가 -2 이므로

$y=-2(x-1)^2+5$
$\quad=-2(x^2-2x+1)+5$
$\quad=-2x^2+4x+3$
$\therefore y=-2x^2+4x+3$

14. 합이 18 인 두 수가 있다. 한 수를 x , 두 수의 곱을 y 라 할 때, 두 수의 곱의 최댓값을 구하면?

① 11 ② 21 ③ 25 ④ 81 ⑤ 100

해설

합이 18 인 두 수가 있다. 한 수를 x 로 두면 나머지 한 수는 $(18-x)$ 이다.

$y = x(18-x) = -x^2 + 18x = -(x^2 - 18x + 81) + 81$

$y = -(x-9)^2 + 81$

따라서 두 수의 곱의 최댓값은 81 이다.

15. $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{203}+\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{158}$ 의 값을 구하면?

① $-1-i$　② $1+i$　③ $-1+i$
④ $1-i$　⑤ 0

해설

$\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=-\frac{2i}{2}=-i$

$\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{2i}{2}=i$

$\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{203}+\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{158}$

$=(-i)^{203}+i^{158}$

$=i+(-1)=-1+i$

16. 임의의 실수 x, y 에 대하여 복소수 $z = x + yi$ 와 켤레복소수 $\bar{z} = x - yi$ 의 곱 $z\bar{z} = 1$ 일 때, $\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ 을 간단히 하면?

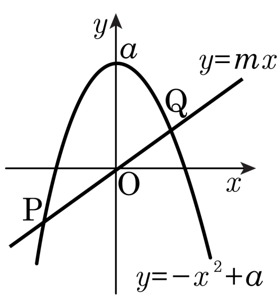
① $-y$　② $-x$　③ x　④ y　⑤ 0

해설

$z\bar{z} = 1$ 에서 $\frac{1}{z} = \bar{z} = x - yi$

$$\therefore \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) = \frac{1}{2}\{(x + yi) + (x - yi)\}$$
$$= \frac{1}{2} \times 2x$$
$$= x$$

17. 다음 그림과 같이 이차함수 $y=-x^2+a$의 그래프와 직선 $y=mx$가 서로 다른 두 점 P, Q에서 만난다. 점 Q의 x좌표가 $\sqrt{5}-1$일 때, $a+m$의 값을 구하여라. (단, a , m 은 유리수)



▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$y=-x^2+a$ 와 $y=mx$ 가 만나는 두 점 P, Q 의 x 좌표는 방정식이 $-x^2+a=mx$ 의 근이다.
점 Q의 x 좌표가 $\sqrt{5}-1$이므로
방정식 $x^2+mx-a=0$의 한 근이 $\sqrt{5}-1$ 이다.
그런데 a 와 m 이 유리수이므로 다른 한 근은 $-\sqrt{5}-1$ 이다.
따라서, 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$-m=\left(\sqrt{5}-1\right)+\left(-\sqrt{5}-1\right)=-2$
$-a=\left(\sqrt{5}-1\right)\left(-\sqrt{5}-1\right)=-4$
$\therefore a=4,\ m=2 \qquad \therefore a+m=6$

18. x의 범위가 $-2 \le x \le 3$일 때, 함수 $f(x) = x^2 + 2x + C$ 의 최소값이 4가 되도록 상수 C 의 값을 정할 때, 함수 $f(x)$ 의 최대값은?

① 8 ② 12 ③ 16 ④ 20 ⑤ 24

해설

$f(x) = (x+1)^2 + C - 1$
주어진 범위에서 $x = -1$ 일 때
최소값을 가지므로
$f(-1) = C - 1 = 4 \quad \Rightarrow \quad C = 5$
$\Rightarrow \quad f(x) = (x+1)^2 + 4$
주어진 범위에서 $x = 3$ 일 때 최대값을 가진다.
$\Rightarrow \quad f(3) = 4^2 + 4 = 20$

19. 이차함수 $y = -x^2 - 2ax + 6a$ 의 최댓값을 M 이라고 할 때, M 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -9

해설

$y = -x^2 - 2ax + 6a = -(x+a)^2 + a^2 + 6a$

$\therefore M = a^2 + 6a = (a+3)^2 - 9$

따라서 M 의 최솟값은 -9 이다.

20. $x^3 - x^2 + 2 = a(x-p)^3 + b(x-p)^2 + c(x-p)$가 x에 대한항등식이 되도록 실수 $a+b+c+p$의 값을 구하면?

① -1 ② 1 ③ -2 ④ 2 ⑤ 0

해설

양변에 $x = p$를 대입하면

$p^3 - p^2 + 2 = 0$

$(p+1)(p^2-2p+2) = 0 \therefore\ p = -1$

따라서 주어진 식은

$x^3 - x^2 + 2 = a(x+1)^3 + b(x+1)^2 + c(x+1)$

양변에 $x = 0$을 대입하면 $2 = a+b+c$

$\therefore\ a+b+c+p = 1$

해설

$a(x-p)^3 + b(x-p)^2 + c(x-p)$

$= (x-p)\left\{a(x-p)^2 + b(x-p) + c\right\}$

$\therefore\ (x+1)(x^2-2x+2)$

$= (x-p)\left\{a(x-p)^2 + b(x-p) + c\right\}$

양변을 비교하면, $x+1 = x-p$,

$x^2 - 2x + 2 = a(x-p)^2 + b(x-p) + c$

$\therefore\ p = -1$

또 $x^2 - 2x + 2 = a(x+1)^2 + b(x+1) + c$

$\qquad\qquad = ax^2 + (2a+b)x + a + b + c$

$\therefore\ a = 1,\ 2a+b = -2,\ a+b+c = 2$

$\therefore\ b = -4,\ c = 5$

따라서 $a = 1,\ b = -4,\ c = 5,\ p = -1$

$\therefore\ a+b+c+p = 1$