1. x의 모든 값에 대하여 다음 등식이 성립할 때, 상수 $a,\ b,\ c$의 값의 합을 구하여라.

$$x^3+1=(x-1)(x-2)(x-3)+a(x-1)(x-2)+b(x-1)+c$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 15

해설

x에 대한 항등식이므로

$x=1$일 때, $2=c\cdots\cdots$ ㉠

$x=2$일 때, $9=b+c\cdots\cdots$ ㉡

$x=3$일 때, $28=2a+2b+c\cdots\cdots$ ㉢

㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=6,\ b=7,\ c=2$

$\therefore\ a+b+c=15$

2. x에 대한 다항식 x^3+ax^2+bx+3을 $(x-1)^2$을 나누었을 때 나머지가 $2x+1$이 되도록 상수 $a-b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

최고차항의 계수가 1이므로

x^3+ax^2+bx+3

$=(x-1)^2(x+k)+2x+1$

$=x^3+(k-2)x^2+(3-2k)x+k+1$

양변의 계수를 비교하면

$a=k-2,\ b=3-2k,\ 3=k+1$

$k=2$이므로 $a=0,\ b=-1$

$\therefore\ a-b=0-(-1)=1$

3. 임의의 실수 x에 대하여 $2x^3-5x+2=a(x+1)^3+b(x+1)^2+c(x+1)+d$가 성립할 때, $a^2-b^2+c^2-d^2$의 값을 구하면?

① 56　② 28　③ −28　④ −46　⑤ −56

해설

a, b, c, d 는 $2x^2-5x+2$ 를 $(x+1)$ 로 계속 나눠 줄때 나오는 나머지이다.

조립제법을 이용해 보면

$$\begin{array}{r|rrrrll}
-1 & 2 & 0 & -5 & 2 & & \\
 & & -2 & 2 & 3 & & \\ \hline
-1 & 2 & -2 & -3 & \boxed{5} & \leftarrow & d \\
 & & -2 & 4 & & & \\ \hline
-1 & 2 & -4 & \boxed{1} & \leftarrow & c & \\
 & & -2 & & & & \\ \hline
-1 & 2 & \boxed{-6} & \leftarrow b & & & \\
 & \uparrow & & & & & \\
 & a & & & & &
\end{array}$$

$\therefore a^2-b^2+c^2-d^2=2^2-(-6)^2+1^2-5^2=-56$

4. 다음 보기에서 옳은 것을 모두 고르면?

㉠ $\sqrt{-2} \cdot \sqrt{-3} = -\sqrt{-6}$

㉡ $\dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{-3}} = 3i$

㉢ $\sqrt{-27} - \sqrt{-3} = 2\sqrt{3}i$

㉣ $\dfrac{4}{\sqrt{-4}} = -2i$

㉤ $\sqrt{-2} \cdot \sqrt{5} = -\sqrt{10}$

㉥ $\sqrt{(-3)^2} + (\sqrt{-3})^2 = 6$

① ㉠,㉡ ② ㉢,㉣ ③ ㉠,㉣,㉤

④ ㉣,㉥ ⑤ ㉠,㉡,㉢,㉣,㉥

해설

㉠ $\sqrt{-2} \cdot \sqrt{-3} = \sqrt{2}i \times \sqrt{3}i = -\sqrt{6}$

㉡ $\dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{-3}} = \dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}i} = -3i$

㉢ $\sqrt{-27} - \sqrt{-3} = 3\sqrt{3}i - \sqrt{3}i = 2\sqrt{3}i$

㉣ $\dfrac{4}{\sqrt{-4}} = \dfrac{4}{2i} = -2i$

㉤ $\sqrt{-2} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{2}i \times \sqrt{5} = \sqrt{10}i$

㉥ $\sqrt{(-3)^2} + (\sqrt{-3})^2 = \sqrt{9} + (\sqrt{3}i)^2 = 0$

5. 복소수 $z = x + yi$를 좌표평면 위에 점 $p(x,\ y)$에 대응시킬 때, $(3-4i)z$가 실수가 되게 하는 점 p의 자취가 나타내는 도형은?

① 기울기가 양인 직선

② 기울기가 음인 직선

③ 위로 볼록한 포물선

④ 아래로 볼록한 포물선

⑤ 원

해설

$$\begin{aligned}(3-4i)\,z &= (3-4i)(x+yi)\\ &= (3x+4y)+(-4x+3y)\,i\end{aligned}$$

실수가 되려면 허수부 $-4x+3y=0$이다.

$\therefore y = \dfrac{4}{3}x$ ($\Rightarrow$ 기울기가 양인 직선)

6. 실수 k 에 대하여 복소수 $z=3(k+i)-k(1-i)^2$ 의 값이 순허수가 될 때, $z\cdot\bar{z}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$z=3(k+i)-k(1-i)^2$ 를 정리하면
$z=3k+3i+2ki=3k+(3+2k)i$
이것이 순허수이려면 $3k=0,\ 3+2k\neq 0$
$k=0$ 이므로 $z=3i,\ \bar{z}=-3i$
$\therefore z\cdot\bar{z}=3i\cdot -3i=9$

7. $x,\ y$가 양의 실수이고, $x^2+xyi+y^2-5-2i=0$일 때, $x+y$의 값을 구하여라.(단, $i=\sqrt{-1}$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

실수부와 허수부로 나눈다.

$(x^2+y^2-5)+(xy-2)i=0$

$x^2+y^2-5=0\cdots$ ㉠

$xy-2=0\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하면

$(x+y)^2=x^2+y^2+2xy=5+4=9$

$\therefore\ x+y=3$ ($\because\ x,\ y$ 는 양의 실수)

8. 두 실수 x, y가 $x+y=-5$, $xy=2$를 만족할 때, $\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}$의 값을 구하면?

① $\sqrt{2}$ ② $\frac{5\sqrt{2}}{4}$ ③ $\frac{5\sqrt{2}}{3}$ ④ $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ ⑤ $3\sqrt{2}$

해설

$x+y=-5$, $xy=2$에서 $x<0$, $y<0$이다.

$$\begin{aligned}\therefore \sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}} &= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}+\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} \\ &= \frac{x+y}{\sqrt{x}\sqrt{y}} \\ &= \frac{x+y}{-\sqrt{xy}} \\ &= \frac{-5}{-\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

9. x에 대한 이차방정식 $4x^2+2(2k+m)x+k^2-k+2n=0$이 임의의 실수 k에 대하여 항상 중근을 가질 때, 실수 m, n에 대하여 $m+n$의 값을 구하면?

① 3 ② $\frac{7}{8}$ ③ $-\frac{2}{3}$ ④ $-\frac{7}{8}$ ⑤ $-\frac{5}{8}$

해설

판별식이 0이어야 한다.

$D'=(2k+m)^2-4(k^2-k+2n)=0$

$\Rightarrow \quad m^2+4km+4k-8n=0$

$\Rightarrow \quad 4k(m+1)+m^2-8n=0$

임의의 k에 대해 성립하려면

$m+1=0, \quad m^2-8n=0$

$\Rightarrow \ m=-1,\ n=\frac{1}{8},\ m+n=-\frac{7}{8}$

10. 이차방정식 $x^2-3x+1=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\alpha+\frac{1}{\beta}$, $\beta+\frac{1}{\alpha}$을 두 근으로 가지는 x의 이차방정식이 $x^2+ax+b=0$이다. $a+b$의 값을 구하면?

① 2 ② 1 ③ -1 ④ -2 ⑤ -3

해설

이차방정식 $x^2-3x+1=0$의 두 근이 α, β이므로,
근과 계수와의 관계에 의해서
$\alpha+\beta=3$, $\alpha\beta=1$이다.

$$\left(\alpha+\frac{1}{\beta}\right)+\left(\beta+\frac{1}{\alpha}\right)=(\alpha+\beta)+\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)$$

$$=(\alpha+\beta)+\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=3+\frac{3}{1}=6$$

$$\left(\alpha+\frac{1}{\beta}\right)\left(\beta+\frac{1}{\alpha}\right)=\alpha\beta+1+1+\frac{1}{\alpha\beta}=1+2+1=4$$

$\therefore\ \alpha+\frac{1}{\beta}$, $\beta+\frac{1}{\alpha}$을 두 근으로 가지는 x의 이차방정식은

$x^2-6x+4=0$

$\therefore\ a=-6,\ b=4$

$\therefore\ a+b=-2$

11. x에 대한 이차방정식 $x^2 + 2(m-2)x + 2m - 1 = 0$의 두 근이 모두 음수일 때, 실수 m 의 값의 범위를 구하면?

① $m > 5$　　② $m \geq 5$　　③ $m < 5$

④ $m \leq 5$　　⑤ $-5 \leq x \leq 5$

해설

주어진 이차방정식이 두 실근을 가져야 하므로

$D/4 = (m-2)^2 - 2m + 1 \geq 0$

즉 $m^2 - 4m + 4 - 2m + 1 = m^2 - 6m + 5 \geq 0$

따라서 $(m-5)(m-1) \geq 0$이므로

$m \leq 1$ 또는 $m \geq 5$

또 두근의 합 $-2(m-2) < 0$이어야 하므로 $m > 2$

또 두근의 곱 $2m - 1 > 0$이어야 하므로 $m > \frac{1}{2}$

따라서 $m \geq 5$

12. 이차함수 $y=x^2-px+q$의 그래프가 점 $(1,\ 1)$을 지나고, x축과 단 한 점에서 만나도록 $p,\ q$의 값을 정할 때, $p+q$의 값으로 가능한 수는?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$y=x^2-px+q \cdots$ ㉠의 그래프는
점 $(1,\ 1)$을 지나므로 $1=1-p+q$
$\therefore\ p=q \cdots$ ㉡
또, ㉠의 그래프가 x축과 단 한 점에서 만나므로,
㉠에서 $y=0$으로 한 이차방정식
$x^2-px+q=0$은 중근을 갖는다.
따라서 판별식을 D라 하면
$D=p^2-4q=0 \cdots$ ㉢
㉡, ㉢에서 $p^2-4p=0$
$\therefore\ p(p-4)=0 \qquad \therefore\ p=0,\ 4$
$\therefore\ p=0,\ q=0$ 또는 $p=4,\ q=4$

13. 실수 x가 $x^2 - 3x + 1 = 0$을 만족할 때, $x^3 + \dfrac{1}{x^3}$의 값을 구하면?

① 18 ② 19 ③ 20 ④ 21 ⑤ 22

해설

준식의 양변을 x로 나누면

$$x + \frac{1}{x} = 3$$

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

$$= 3^3 - 3 \times 3 = 18$$

14. $a+b+c=1,\ ab+bc+ca=1,\ abc=1$일 때, $a^3+b^3+c^3$의 값은?

① 3 ② -3 ③ 1 ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{9}$

해설

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

$1=a^2+b^2+c^2+2$

$\therefore\ a^2+b^2+c^2=-1$

$a^3+b^3+c^3-3abc$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$a^3+b^3+c^3-3=1\cdot(-1-1)=-2$

$\therefore\ a^3+b^3+c^3=1$

15. $x+y=2,\ x^3+y^3=14$일 때, 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $xy=-1$　② $x^2+y^2=6$　③ $x^4+y^4=34$

④ $x^5+y^5=86$　⑤ $x^6+y^6=198$

해설

① $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$ 에서

$14=2^3-3xy\times 2$

$\therefore\ xy=-1$

② $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$ 에서

$x^2+y^2=2^2-2(-1)=6$

③ $x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2$ 에서

$x^4+y^4=6^2-2(-1)^2=34$

④ $x^5+y^5=(x^2+y^2)(x^3+y^3)-x^2y^2(x+y)$ 에서

$x^5+y^5=6\times 14-(-1)^2\times 2=82\neq 86$

⑤ $x^6+y^6=(x^3+y^3)^2-2x^3y^3$ 에서

$x^6+y^6=14^2-2(-1)^3=198$

16. $x+y+z=0,\ 2x-y-7z=3$을 동시에 만족시키는 x, y, z에 대하여 $ax^2+by^2+cz^2=1$이 성립할 때, $a+b+c$의 값을 구하면?

① 11　② 8　③ 7　④ 6　⑤ 4

해설

(i) $x+y+z=0,\ 2x-y-7z=3$에서

$x,\ y$를 z에 대하여 나타내면

$x=2z+1,\ y=-3z-1$

(ii) $x=2z+1,\ y=-3z-1$을 $ax^2+by^2+cz^2=1$ 에 대입하여 정리하면

$(4a+9b+c)z^2+2(2a+3b)z+(a+b-1)=0$

$\therefore\ 4a+9b+c=0,\ 2a+3b=0,\ a+b-1=0$

$\therefore\ a=3,\ b=-2,\ c=6$

$\therefore\ a+b+c=7$

17. 모든 실수 x에 대하여 $x^{10}+1=a_0+a_1(x-1)+a_2(x-1)^2+\cdots+a_{10}(x-1)^{10}$이 성립할 때, $a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{10}$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 513

해설

양변에 $x=0$을 대입하면

$1=a_0-a_1+a_2-\cdots+a_{10}\cdots①$

양변에 $x=2$을 대입하면

$2^{10}+1=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{10}\cdots②$

①+②에 의해

$2^{10}+2=2(a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{10})$

$\therefore (a_0+a_2+\cdots+a_{10})=2^9+1=513$

18. 이차식 $f(x)$를 각각 $x-3, x+1$로 나눈 나머지는 같고, $f(1)=0$일 때, $\dfrac{f(4)}{f(-4)}=\dfrac{n}{m}$ ($m,\ n$은 서로소)이다. 이 때, $m+n$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 34

해설

$f(1)=0$ 이므로 $f(x)$ 는 $x-1$을 인수로 갖는다.

$\therefore\ f(x)=(x-1)(ax+b)$

$f(3)=f(-1)$ 이므로 $2(3a+b)=-2(-a+b)$

$\therefore\ a=-b$

$$\frac{f(4)}{f(-4)}=\frac{3(4a+b)}{-5(-4a+b)}=\frac{-9b}{-25b}=\frac{9}{25}$$

$\therefore\ m=25,\ n=9$

19. 0이 아닌 세 수가 있다. 이들의 합은 0, 역수의 합은 $\frac{3}{2}$, 제곱의 합은 1일 때, 이들 세 수의 세제곱의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

세 수를 x, y, z라 하면 주어진 조건으로부터

$x+y+z=0 \cdots\cdots$ ㉠

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{3}{2} \cdots\cdots$ ㉡

$x^2+y^2+z^2=1 \cdots\cdots$ ㉢

$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$ 이므로

㉠, ㉢에서 $0^2=1+2(xy+yz+zx)$

$\therefore\ xy+yz+zx=-\frac{1}{2} \cdots\cdots$ ㉣

㉡에서 $\frac{xy+yz+zx}{xyz}=\frac{3}{2}$ 이므로

$3xyz=2(xy+yz+zx)$

$\therefore\ xyz=-\frac{1}{3}$

또, $x^3+y^3+z^3-3xyz$

$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$

㉠에서 $x+y+z=0$ 이므로

$x^3+y^3+z^3=3xyz=3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)=-1$

20. 세 변의 길이가 a, b, c인 삼각형에 대하여 $(a^2+b^2)c+(a+b)c^2=(a+b)(a^2+b^2)+c^3$이 성립할 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

① $b=c$인 이등변 삼각형
② a가 빗변인 직각삼각형
③ $a=c$인 이등변 삼각형
④ c가 빗변인 직각삼각형
⑤ 정삼각형

해설

준식을 c에 관한 내림차순으로 정리하면

$c^3-(a+b)c^2-(a^2+b^2)c+(a+b)(a^2+b^2)$ 에서

$c^2\{c-(a+b)\}-(a^2+b^2)\{c-(a+b)\}$

$=\{c-(a+b)\}\{c^2-(a^2+b^2)\}$

$=(c-a-b)(c^2-a^2-b^2)=0$

a ,b ,c 는 삼각형의 세변이므로

$c-a-b\neq 0$이고 $c^2-a^2-b^2=0$

즉 $c^2=a^2+b^2$ 이므로 c가 빗변인 직각 삼각형이다.

21. 인수분해 공식 $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$을 이용하여 $\dfrac{9999^3+1}{9998 \times 9999 + 1}$을 계산하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10000

해설

$9999 = a$라 하면

$$\frac{9999^3+1}{9998 \times 9999+1} = \frac{a^3+1}{(a-1)a+1}$$

$$= \frac{(a+1)(a^2-a+1)}{a^2-a+1}$$

$$= a+1 = 10000$$

22. 복소수 $z=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}$ 에 대하여 $(3z^2+z)^2+(z^2+3z)^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$z=\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}=\frac{(1+\sqrt{3}i)^2}{(1-\sqrt{3}i)(1+\sqrt{3}i)}$$
$$=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$$
$$z^2=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$$
$$(3z^2+z)^2+(z^2+3z)^2$$
$$=\left(\frac{-3-3\sqrt{3}i-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2$$
$$+\left(\frac{-1-\sqrt{3}i-3+3\sqrt{3}i}{2}\right)^2$$
$$=(-2-\sqrt{3}i)^2+(-2+\sqrt{3}i)^2$$
$$=4+4\sqrt{3}i-3+4-4\sqrt{3}i-3=2$$

해설

$$z=\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}$$
$$=\frac{(1+\sqrt{3}i)^2}{(1-\sqrt{3}i)(1+\sqrt{3}i)}$$
$$=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$$

에서 양변에 2를 곱하고 -1 을 우변으로 이항하면 $2z+1=\sqrt{3}i$
양변을 제곱하면

$4z^2+4z+1=-3$

$\rightarrow 4z^2+4z+4=0$

$\rightarrow z^2+z+1=0$

$\rightarrow (z-1)(z^2+z+1)=0$

$\rightarrow z^3-1=0$

$\rightarrow z^3=1$

※방정식에 익숙한 학생들은

$z=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 에서 바로 $z^2+z+1=0$ 와 $z^3=1$ 을 도출할 수 있을 것이다.

$(3z^2+z)^2+(z^2+3z)^2$

$=10z^4+12x^3+10z^2$

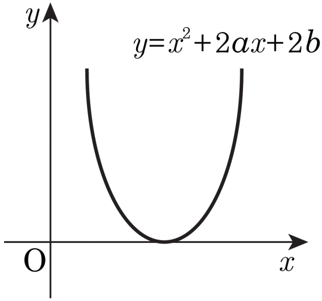
$=(10z^4+10z^3+10z^2)+2z^3$

$=10z^2(z^2+z+1)+2z^3$

$=0+2$

$=2$

23. 이차함수 $y = x^2 + 2ax + 2b$ 의 그래프가 아래 그림과 같을 때, 방정식 $x^2 - 2ax + b^2 + 2 = 0$ 의 근에 대한 설명으로 옳은 것은?



① 서로 다른 양의 실근을 갖는다.

② 서로 다른 음의 실근을 갖는다.

③ 중근을 갖는다.

④ 서로 다른 부호의 실근을 갖는다.

⑤ 서로 다른 두 허근을 갖는다.

해설

㉠ 그래프에서 중근이므로 $a^2 - 2b = 0$

㉡ $x^2 - 2ax + b^2 + 2 = 0$

판별식 $\dfrac{D}{4} = a^2 - b^2 - 2 \leftarrow a^2 = 2b$

$= 2b - b^2 - 2$

$= -(b^2 - 2b + 2)$

$= -(b-1)^2 - 1 < 0$

$\therefore$ 서로 다른 두 허근을 갖는다.

24. 이차방정식 $ax^2+(a-3)x-2a=0$의 두 근의 차가 $\sqrt{17}$이 되도록 하는 상수 a의 값들의 합은?

① $-\frac{9}{4}$ ② $-\frac{3}{4}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ $\frac{9}{4}$ ⑤ $\frac{11}{4}$

해설

$ax^2+(a-3)x-2a=0$의 두 근을 α, β라 하면,

$\alpha+\beta=-\frac{a-3}{a}$, $\alpha\beta=-2$

문제의 조건에서 $|\alpha-\beta|=\sqrt{17}$

$$\therefore\ 17=(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$$

$$=\left(\frac{a-3}{a}\right)^2+8$$

$$\therefore\ \left(\frac{a-3}{a}\right)^2=9,\ 8a^2+6a-9=0$$

따라서, a의 값들의 합은 $-\frac{3}{4}$

25. 삼차방정식 $x^3+(p-4)x-2p=0$의 중근을 α, 다른 한 근을 β라 할 때 $\alpha+\beta+p$의 값을 구하면?

① -10 또는 -2　② -10 또는 -1　③ -10 또는 2
④ -10 또는 4　⑤ -10 또는 5

해설

$f(x)=x^3+(p-4)x-2p$로 놓으면 $f(2)=0$이므로
$f(x)=(x-2)(x^2+2x+p)=0$
따라서 $x=2,\ x^2+2x+p=0$
그런데 중근을 가져야 하므로
ⅰ) $x=2$가 x^2+2x+p의 근일 때
$2^2+2\times2+p=0$
$\therefore\ p=-8,\ f(x)=(x-2)(x^2+2x-8)=(x-2)^2(x+4)$
$\therefore\ \alpha=2,\ \beta=-4$
따라서, $\alpha+\beta+p=2+(-4)+(-8)=-10$
ⅱ) $x^2+2x+p=0$이 중근을 가질 때
$D/4=0$이므로 $D/4=1-p=0$
$\therefore\ p=1,\ f(x)=(x-2)(x^2+2x+1)=(x-2)(x+1)^2$
$\therefore\ \alpha=-1,\ \beta=2,\ p=1$
따라서, $\alpha+\beta+p=-1+2+1=2$
ⅰ) ⅱ)로부터 $\alpha+\beta+p$의 값은 -10 또는 2이다.

26. 2 년 전의 A 와 B 의 임금은 서로 같았으나 그 해 A 의 임금은 8% 인상되었고, 작년에는 다시 47% 인상되었다. 반면 B의 임금은 2 년 전과 작년의 임금 인상률이 모두 a% 로 일정했다. 두 사람의 올해 임금이 서로 같을 때, a 의 값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 26

해설

2 년 전 두 사람의 임금을 k 원이라면
올해 A 와 B 의 임금은 각각
A : $k(1+0.08)(1+0.47)$
B : $k\left(1+\dfrac{a}{100}\right)^2$
따라서
$(100+a)^2 = 108\times147 = 3\times3\times6\times6\times7\times7$
$\therefore\ 100+a=126$
$\therefore a=26$

27. 각 면에 1부터 12까지 자연수가 하나씩 적힌 정십이면체의 주사위가 있다. 이 주사위를 두 번 던져 나오는 눈의 수를 각각 x, y라 할 때, $xy-3x+2y=18$을 만족하는 순서쌍 $(x,\ y)$의 개수는?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$xy-3x+2y=18,\ x(y-3)+2y=18,$

$x(y-3)+2(y-3)=12$

$(x+2)(y-3)=12$

$x+2\geq 3$이므로

$(x+2,\ y-3)=(3,4),(4,3),(6,2),(12,1)$

$\therefore (x,\ y)=(1,7),(2,6),(4,5).(10,4)$

$\therefore$ 4개

28. 자연수 n에 대하여 이차방정식 $x^2+nx+2n=0$의 두 근을 α, β라 한다. α, β가 정수일 때, n은?

① 7, 8 ② 8, 9 ③ 9, 10 ④ 9 ⑤ 10

해설

근과 계수와의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=-n$, $\alpha\beta=2n$ 이므로

$\alpha\beta=-2(\alpha+\beta)$, $\alpha\beta+2(\alpha+\beta)=0$, $(\alpha+2)(\beta+2)=4$

α, β 가 정수이므로 $\alpha+2$, $\beta+2$ 도 정수

따라서

$$\begin{cases}\alpha+2=1\\ \beta+2=4\end{cases},\quad \begin{cases}\alpha+2=2\\ \beta+2=2\end{cases}\quad \begin{cases}\alpha+2=-1\\ \beta+2=-4\end{cases},$$

$$\begin{cases}\alpha+2=-2\\ \beta+2=-2\end{cases}$$ 가 되어

$$\begin{cases}\alpha=-1\\ \beta=2\end{cases},\ \begin{cases}\alpha=0\\ \beta=0\end{cases},\ \begin{cases}\alpha=-3\\ \beta=-6\end{cases},\ \begin{cases}\alpha=-4\\ \beta=-4\end{cases}$$

각각의 경우, n 의 값은 $n=-(\alpha+\beta)$ 이므로

-1, 0, 9, 8 의 값을 갖는다.

29. $\dfrac{10^{85}}{10^{15}+10^{5}} = k\times 10^{n}$ (단, $0<k<10$, n은 자연수)로 나타낼 때, n의 값을 구하면?

① 72 ② 71 ③ 70 ④ 69 ⑤ 68

해설

$\dfrac{10^{85}}{10^{15}+10^{5}} = N$이라고 하면

$\dfrac{10^{85}}{10^{15}+10^{15}} < N < \dfrac{10^{85}}{10^{15}}$

$\dfrac{10\times 10^{84}}{2\times 10^{15}} < N < \dfrac{10\times 10^{84}}{10^{15}}$

$5\times 10^{69} < N < 10\times 10^{69}$

따라서 $N = k\times 10^{69}\,(5<k<10)$

$\therefore\ n = 69$

30. x에 대한 항등식 $x^{1997}+x+1$을 x^2-1로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 할 때, $Q(x)$의 모든 계수와 상수항의 합을 구하면?

① 997　② 998　③ 1997　④ $\dfrac{1997}{2}$　⑤ $\dfrac{1997}{3}$

해설

$x^{1997}+x+1=(x^2-1)Q(x)+ax+b$라 하면

$x=1$일 때, $3=a+b$

$x=-1$일 때, $-1=-a+b$

$\therefore\ a=2,\ b=1$

$\therefore\ x^{1997}+x+1=(x^2-1)Q(x)+2x+1$

$x^{1997}-x=(x^2-1)Q(x)$

$x(x-1)(x^{1995}+x^{1994}+\cdots+x+1)$

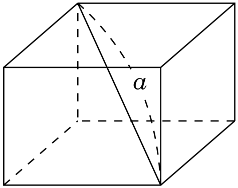
$=(x-1)(x+1)Q(x)$

$\therefore\ x(x^{1995}+x^{1994}+\cdots+x+1)=(x+1)Q(x)$

$Q(1)$이 $Q(x)$의 모든 계수의 합이므로 $x=1$을 대입하면

$2Q(1)=1996 \quad \therefore\ Q(1)=\dfrac{1996}{2}=998$

31. 다음 그림과 같은 직육면체에서 대각선의 길이가 a이고, 모든 모서리의 길이의 합이 b일 때, 이 직육면체의 겉넓이는?



① $\frac{1}{16}b^2 - a^2$ ② $\frac{1}{8}b^2 - a^2$ ③ $\frac{1}{4}b^2 - a^2$
④ $\frac{1}{8}b^2 + a^2$ ⑤ $\frac{1}{16}b^2 + a^2$

해설

가로, 세로의 길이와 높이를 각각 x, y, z라 하면

$$4(x+y+z) = b,\ \sqrt{x^2+y^2+z^2} = a$$

$$\therefore\ x+y+z = \frac{1}{4}b,\ x^2+y^2+z^2 = a^2$$

따라서, 구하는 직육면체의 겉넓이는

$$\begin{aligned} 2(xy+yz+zx) &= (x+y+z)^2 - (x^2+y^2+z^2) \\ &= \left(\frac{1}{4}b\right)^2 - a^2 \\ &= \frac{1}{16}b^2 - a^2 \end{aligned}$$

32. 두 다항식 $x^3+x^2+x+3+m$, x^2-x+m이 서로소가 아닐 때, 상수 m의 값을 구하면?

① $-1,\ 2$ ② $-2,\ 3$ ③ $-1,\ 2$ ④ $-1,\ 3$ ⑤ $-2,\ 2$

해설

서로소가 아니라는 것은 일차이상의 공약수가 존재한다는 뜻이다.

$f(x)=x^3+x^2+x+3+m \cdots$ ㉠

$g(x)=x^2-x+m \cdots$ ㉡

으로 놓으면

$f(x)-g(x)=x^3+2x+3=(x+1)(x^2-x+3)$

㉠과 ㉡이 서로소가 아니므로 ㉠과 ㉡의 최대공약수는 $x+1$ 또는 x^2-x+3이다.

(i) $x+1$이 최대공약수일 때, $m=-2$

(ii) x^2-x+3이 최대공약수일 때, 이 식과 $g(x)$는 서로 같아야 하므로 $m=3$

(i), (ii)에서 $m=-2$ 또는 3

33. $f(n)=(n+1)i^n - ni^{n+1}$ 이라고 할 때, 다음 중 옳은 것은? (단, n 은 자연수이고, $i^2=-1$ 이다.)

① $f(n+1)-f(n)$ 은 실수이다.

② $f(n+1)-f(n)$ 은 순허수이다.

③ $f(n)+f(n+1)+f(n+2)+f(n+3)$ 은 실수이다.

④ $f(n)+f(n+1)+f(n+2)+f(n+3)$ 은 순허수이다.

⑤ $f(1)+f(2)+\cdots+f(8)$ 은 순허수이다.

해설

k가 정수일 때 $i^{4k}=1,\ i^{4k+1}=i$,
$i^{4k+2}=-1,\ i^{4k+3}=-i$ 이므로
$f(1)=2i+1$,$f(2)=-3+2i$, $f(3)=-4i-3$, $f(4)=5-4i$
$f(5)=6i+5$,$f(6)=-7+6i$, $f(7)=-8i-7$,$f(8)=9-8i$
① $f(3)-f(2)=-6i$ (거짓)
② $f(2)-f(1)=-4$ (거짓)
③ $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=-4i$ (거짓)
④ $f(2)+f(3)+f(4)+f(5)=4$ (거짓)
⑤ $f(1)+f(2)+\cdots+f(8)$

$$=\{f(1)+f(2)+f(3)+f(4)\}$$
$$+\{f(5)+f(6)+f(7)+f(8)\}$$
$$=-4i-4i=-8i$$ (참)

34. 세 방정식 $x^2+2ax+bc=0$, $x^2+2bx+ca=0$, $x^2+2cx+ab=0$ 의 근에 대한 다음 설명 중 옳은 것은? (단, a, b, c는 실수)

① 세 방정식은 모두 실근을 갖는다.

② 세 방정식은 모두 허근을 갖는다.

③ 반드시 두 방정식만 실근을 갖는다.

④ 반드시 한 방정식만 실근을 갖는다.

⑤ 적어도 하나의 방정식은 실근을 갖는다.

해설

세 방정식의 판별식을 각각

$$\frac{D_1}{4}=a^2-bc,$$

$$\frac{D_2}{4}=b^2-ca,$$

$\dfrac{D_3}{4}=c^2-ab$라 하면

$$\frac{D_1}{4}+\frac{D_2}{4}+\frac{D_3}{4}$$

$$=a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$$

$$=\frac{1}{2}\left\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right\}\geq 0$$

따라서, $\dfrac{D_1}{4}$, $\dfrac{D_2}{4}$, $\dfrac{D_3}{4}$ 중 적어도 하나는 0보다 크거나 같다.

곧, 적어도 하나의 방정식은 실근을 갖는다.

35. 이차방정식 $x^2-2x-1=0$의 두 근을 α, β라고 할 때, $\left(\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}-\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\right)^2$의 값은?

① -4　　② -2　　③ 0　　④ 2　　⑤ 4

해설

$x^2-2x-1=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=-1$

$\alpha\beta<0$이므로 $\frac{\beta}{\alpha}<0,\ \ \frac{\alpha}{\beta}<0$

$$\therefore \left(\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}-\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\right)^2=\frac{\beta}{\alpha}-2\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}+\frac{\alpha}{\beta}$$

$$=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}+2\left(\because\ \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}=-\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{\alpha}{\beta}}\right)$$

$$=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}+2$$

$$=-4$$

해설

36. x 에 관한 이차방정식 $x^2-2(p+2)x+2p-3q=0$ 이 중근을 가질 때, q 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$x^2-2(p+2)x+2p-3q=0$ 이 중근을 가지므로

$$\frac{D}{4}=(p+2)^2-2p+3q$$

$$=p^2+4p+4-2p+3q=0$$

$$\therefore\ q=-\frac{1}{3}p^2-\frac{2}{3}p-\frac{4}{3}=-\frac{1}{3}(p+1)^2-1$$

따라서 $p=-1$ 일 때, q 는 최댓값 -1 을 갖는다.

37. $-1 \le x \le 2$ 에서 이차함수 $f(x) = x^2 + 2ax + 1$ 의 최소값이 -8 일 때, 모든 실수 a 의 값의 합은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ $\frac{5}{4}$ ④ $\frac{7}{4}$ ⑤ $\frac{9}{4}$

해설

$f(x) = x^2 + 2ax + 1 = (x+a)^2 + 1 - a^2$ 에서 꼭지점의 x 좌표는 $-a$ 이다.

(i) $-a < -1$, 즉 $a > 1$ 일 때, $-1 \le x \le 2$ 에서
$f(x)$ 의 최솟값은 $f(-1) = 2 - 2a = -8$
$\therefore\ a = 5$

(ii) $-1 \le -a < 2$, 즉 $-2 < a \le 1$ 일 때, $-1 \le x \le 2$ 에서
$f(x)$ 의 최솟값은 $f(-a) = 1 - a^2 = -8,\ a^2 = 9$
$\therefore\ a = \pm 3$
$-2 < a \le 1$ 이므로 a 의 값은 존재하지 않는다.

(iii) $-a \ge 2$, 즉 $a \le -2$ 일 때, $-1 \le x \le 2$ 에서
$f(x)$ 의 최솟값은 $f(2) = 5 + 4a = -8$
$\therefore\ a = -\frac{13}{4}$

따라서 모든 실수 a 의 값의 합은 $5 + \left(-\frac{13}{4}\right) = \frac{7}{4}$

38. 이차함수 $y = x^2 - px + p^2 - 2p + 5$ 의 최솟값을 k 이라 할 때, k 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\dfrac{11}{3}$

해설

$$y = x^2 - px + p^2 - 2p + 5$$
$$= \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2}{4} + p^2 - 2p + 5$$
$$= \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}p^2 - 2p + 5$$

이므로

$$k = \frac{3}{4}p^2 - 2p + 5$$
$$= \frac{3}{4}\left(p - \frac{4}{3}\right)^2 - \frac{3}{4} \times \frac{16}{9} + 5$$
$$= \frac{3}{4}\left(p - \frac{4}{3}\right)^2 + \frac{11}{3}$$

따라서 $p = \dfrac{4}{3}$ 일 때, 최솟값 $\dfrac{11}{3}$ 을 갖는다.

39. x 가 실수일 때, $\dfrac{x^2-x+3}{x^2+x+1}$ 의 값이 취할 수 있는 정수의 개수는?

① 2개　② 3개　③ 4개　④ 5개　⑤ 6개

해설

$\dfrac{x^2-x+3}{x^2+x+1}=k$ 라 하면

$x^2-x+3=k\left(x^2+x+1\right)$

$(k-1)x^2+(k+1)x+k-3=0$ 이 방정식이 성립하려면

(i) $k-1=0$, 즉 $k=1$ 일 때, $x=1$

따라서, $k=1$ 은 성립한다.

(ii) $k-1\neq 0$, 즉 $k\neq 1$ 일 때, x 가 실수이므로 이차방정식은 실근을 갖는다. 즉, 판별식 $D\geq 0$ 이다.

$D=(k+1)^2-4(k-1)(k-3)\geq 0$

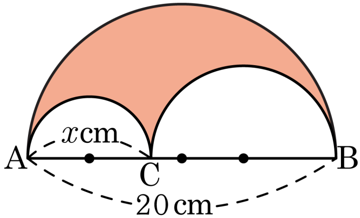
$3k^2-18k+11\leq 0$

$\therefore \dfrac{9-4\sqrt{3}}{3}\leq k\leq \dfrac{9+4\sqrt{3}}{3}$

$0.\times\times\times \leq k \leq 5.\times\times\times$ 이므로 이 범위를 만족하는 정수 $k=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ 이다.

(i), (ii)에서 구하는 정수 k 의 개수는 5 개다.

40. 다음 그림과 같이 세 개의 반원으로 이루어진 도형이 있다. 큰 반원의 지름이 20 cm 이고 색칠한 부분의 넓이가 $y\pi$ cm^2 일 때, y 의 최댓값을 구하면?



① 10 ② 15 ③ 16 ④ 25 ⑤ 36

해설

$\overline{AC} = x$ cm 이므로 $\overline{BC} = (20-x)$ cm 이다.
따라서 색칠한 부분의 넓이 S 는
(전체 반원의 넓이 - 작은 두 원의 넓이의 합) 이다.

$$\frac{1}{2}\times 10^2\pi - \left\{\frac{1}{2}\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\pi\left(\frac{20-x}{2}\right)^2\right\} = y\pi$$

$$50\pi - \left(\frac{x^2}{8}\pi + \frac{400-40x+x^2}{8}\pi\right) = y\pi$$

$$50\pi - \left(\frac{2x^2-40x+400}{8}\right)\pi = y\pi$$

$$-\frac{1}{4}x^2\pi + 5x\pi = y\pi$$

$$\begin{aligned} y\pi &= -\frac{1}{4}\pi(x^2-20x) \\ &= -\frac{1}{4}\pi(x^2-20x+100-100) \\ &= -\frac{1}{4}\pi(x-10)^2 + 25\pi \text{이다.} \end{aligned}$$

따라서 두 원의 반지름이 각각 10 cm 일 때, 넓이는 최댓값 25π cm^2 를 갖는다.