

1. 두 자리 자연수 n 과 60 의 최대공약수가 12 , $n + 42$ 가 15 의 배수일 때, n 과 60 의 최소공배수를 a 라고 한다. $a + n$ 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 288

해설

$$n = 12 \times a ,$$

$n + 42 = 12 \times a + 42 = 15 \times b$ 를 만족하는 $12 \times a + 42$ 는 90 이고 이때 n 은 48 이다.

48 와 60 의 최소공배수는 240 이므로,

$$\therefore a + n = 240 + 48 = 288$$

2. $1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 10 = 2^a \times 3^b \times 5^c \times 7$ 이 된다. 이 때, $a + b + c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

$$\begin{aligned} & 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 10 \\ &= 1 \times 2 \times 3 \times (2 \times 2) \times 5 \times (2 \times 3) \times 7 \times (2 \times 2 \times 2) \times (3 \times 3) \times (2 \times 5) \\ &= 2^8 \times 3^4 \times 5^2 \times 7 \text{ 이므로} \\ &a + b + c = 8 + 4 + 2 = 14 \text{ 이다.} \end{aligned}$$

3. 숫자 카드 1, 3, 5, 7, 9 중에서 3 장을 골라 세 자리 수를 만들 때, 만든 수 중 3의 배수의 개수를 구하여라.

▶ 답: 개

▷ 정답: 24개

해설

3의 배수는 각 자리 수를 모두 더한 값이 3의 배수이다.

1, 3, 5, 7, 9로 만든 세 수를 더하여 3의 배수의 되는 조합은, (1, 3, 5), (1, 5, 9), (3, 5, 7), (5, 7, 9)이다.

$\therefore$ 3의 배수의 개수 $= 3 \times 2 \times 1 \times 4 = 24$ (개)

4. $\frac{n}{2}$ 이 어떤 자연수의 세제곱이고, $\frac{n}{3}$ 이 어떤 자연수의 제곱이 되는 자연수 n 중에서 가장 작은 것을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 정답 : 432

해설

가장 작은 자연수 n 에서 $\frac{n}{2}$ 이 세제곱이므로 n 은 적어도 2 가 네 번 곱해져 있고, $\frac{n}{3}$ 이 제곱이므로 n 은 3 이 세 번 곱해져 있다.

$$\therefore n = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 = 432$$

5. 72 에 자연수를 곱하여 어떤 자연수의 제곱을 만들려고 한다. 이때, 곱할 수 있는 가장 작은 두 자리의 자연수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 18

해설

$72 \times n = 2^3 \times 3^2 \times n = m^2$ 이라 하면

가장 작은 $n = 2$ 이므로

따라서 n 은

$$n = 2 \times 1^2 = 2$$

$$n = 2 \times 2^2 = 8$$

$$n = 2 \times 3^2 = 18$$

$$n = 2 \times 4^2 = 32$$

그러므로 가장 작은 두 자리의 자연수 n 은 18 이다.

6. $28 \times x = \frac{588}{y} = z^2$ 을 만족하는 자연수 z 의 값을 구하여라. (단, a, b, c 는 모두 자연수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

$$28 \times x = \frac{588}{y} = z^2$$

$28 \times x$ 와 $\frac{588}{y}$ 가 어떤 수의 제곱수가 되어야 하므로 소인수분해를 해 보면

$$2^2 \times 7 \times x = \frac{2^2 \times 3 \times 7^2}{y} \text{ 에서}$$

$2^2 \times 7 \times x = z^2$ 을 만족하는 x 는 $7, 7 \times 2^2, 7 \times 3^2, 7 \times 4^2, \dots$ 이고

이에 따른 z^2 의 값은 $2^2 \times 7^2, 2^4 \times 7^2, 2^2 \times 3^2 \times 7^2, 2^6 \times 7^2, \dots$ 이다.

$$\frac{2^2 \times 3 \times 7^2}{y} = z^2 \text{ 을 만족하는 } y \text{ 는 } 3, 2^2 \times 3, 3 \times 7^2, 2^2 \times 3 \times 7^2$$

이고

이에 따른 z^2 의 값은 $2^2 \times 7^2, 7^2, 2^2, 1$ 이다.

따라서 두 식을 동시에 만족하는 값은

$x = 7, y = 3, z = 14$ 이다.

7. 45에 어떤 자연수를 곱하여 어떤 수의 제곱이 되게 하려고 한다. 곱해야 할 가장 작은 수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$$45 = 3^2 \times 5$$

따라서 제곱이 되려면 5를 곱해야 한다.

8. 504 의 약수의 개수와 $3^x \times 7^2 \times 13^y$ 의 약수의 개수가 같다고 한다.
이때, $x - y$ 의 값을 구하여라. (단, x, y 는 $x > y$ 인 자연수)

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$504 = 2^3 \times 3^2 \times 7$ 이므로 약수의 개수가 같기 위해서는 $x = 3$,
 $y = 1$ 이어야 한다. ($\because x > y$)

$$\therefore x - y = 3 - 1 = 2$$

9. 1 부터 50 사이의 수 중에서 약수의 개수가 3 개인 수는 모두 몇 개인지 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 4 개

해설

약수의 개수가 3 개인 수는 (소수)² 이므로
50 이하의 수 중 소수의 제곱이 되는 수는 $2^2, 3^2, 5^2, 7^2$ 의 4 개

10. 두 자연수 a, b 의 최대공약수가 2×3^2 일 때, a, b 의 공약수의 개수를 구하여라.

▶ 답: 개

▷ 정답: 6 개

해설

a, b 의 공약수는 최대공약수 $2 \times 3^2 = 18$ 의 약수와 같으므로
(a, b 의 공약수의 개수)
= (18의 약수의 개수)
= (2×3^2 의 약수의 개수)
= $(1 + 1) \times (2 + 1)$
= 6(개)

11. 세 자연수 16, 24, 48 의 공배수 중 세 자리 자연수는 모두 몇 개인지 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 18 개

해설

16, 24, 48 의 공배수는 48 의 배수이다.

999 까지의 48 의 배수는 $999 \div 48 = 20 \cdots 39$ 이므로 20 개 있고,

99 까지의 48 의 배수는 $99 \div 48 = 2 \cdots 3$ 이므로 2 개 있다.

따라서 48 의 배수 중 세 자리 자연수는 $20 - 2 = 18$ (개) 있다.

12. $15 \times x$, $20 \times x$ 의 최소공배수가 180 이라고 할 때 x 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

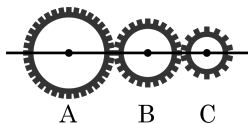
▷ 정답 : 3

해설

$15 \times x$, $20 \times x$ 의 최소공배수는 $2^2 \times 3 \times 5 \times x = 180$ 이다.
따라서 $x = 3$ 이다.

13. 다음 그림과 같이 서로 맞물려 돌아가는 세 톱니바퀴 A, B, C의 톱니의 수는 각각 36 개, 24 개, 14 개이다.

세 톱니바퀴가 돌아 원래 모양이 되려면 톱니바퀴 A는 몇 번 회전해야 하는지 구하여라.



▶ 답: 번

▷ 정답: 14번

해설

세 톱니바퀴가 원래 모양이 되기까지 돌아간 톱니의 개수는 36, 24, 14의 최소공배수인 504개이므로, 톱니바퀴 A는 $504 \div 36 = 14$ (번) 회전해야 한다.

14. $\frac{8}{n}, \frac{24}{n}, \frac{36}{n}$ 을 자연수로 만드는 자연수 n 들을 모두 곱하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

n 은 8, 24, 36 의 공약수, 공약수는 최대공약수의 약수이므로
8, 24, 36 의 최대공약수는 4 이다.

4 의 약수는 1, 2, 4 이다.

따라서 8 이다.

15. 어떤 분수에 $\frac{20}{9}$, $\frac{25}{12}$ 의 어느 것을 곱하여도 그 결과는 자연수라고 한다. 이를 만족하는 분수 중 가장 작은 분수를 A 라 할 때, $A \times \frac{20}{9}$ 을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

구하려는 분수를 $A = \frac{b}{a}$ 라고 하자.

$$\frac{20}{9} \times \frac{b}{a} = (\text{자연수}) \rightarrow \begin{cases} b \text{는 } 9 \text{의 배수} \\ a \text{는 } 20 \text{의 약수} \end{cases}$$

$$\frac{25}{12} \times \frac{b}{a} = (\text{자연수}) \rightarrow \begin{cases} b \text{는 } 12 \text{의 배수} \\ a \text{는 } 25 \text{의 약수} \end{cases}$$

$$\text{즉, } \frac{b}{a} = \frac{(9, 12 \text{의 공배수})}{(20, 25 \text{의 공약수})} \dots \text{㉠이다.}$$

㉠을 만족하는 가장 작은 분수

$$\frac{b}{a} = \frac{(9, 12 \text{의 최소공배수})}{(20, 25 \text{의 최대공약수})}$$

$$\therefore A = \frac{b}{a} = \frac{36}{5}$$

$$\text{따라서 } A \times \frac{20}{9} = \frac{36}{5} \times \frac{20}{9} = 4 \times 4 = 16 \text{ 이다.}$$

16. 다음 보기의 수 중에서 그림의 색칠한 부분에 해당하는 수의 개수를 구하여라.

정수

자연수

보기

㉠ 0

㉡ 1

㉢ -3

㉣ $+\frac{3}{4}$

㉤ +8

㉥ $-\frac{42}{7}$

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 3 개

해설

그림의 색칠한 부분은 자연수가 아닌 정수이다.

따라서, $-\frac{42}{7} = -6$ 이므로 색칠한 부분에 해당하는 수는

0, -3, $-\frac{42}{7}$ 의 3 개이다.

17. 두 정수 A, B에 대하여 $|A| = 5$, $|B| = 7$ 일 때, $A + B$ 가 될 수 있는 값 중 가장 큰 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

절댓값이 5인 수는 $+5$, -5 이고, 절댓값이 7인 수는 $+7$, -7 이다.
따라서 $A = +5$, $A = -5$ 이고, $B = +7$, $B = -7$ 이다.

$A + B$ 가 최댓값을 가질 때는 A도 최댓값을 가지고 B도 최댓값을 가질 때이다.

따라서 $A + B = 5 + 7 = 12$ 이다.

18. 수직선 위에서 두 수 a, b 에 대응하는 두 점 사이의 거리가 10 이고 두 점의 한 가운데 있는 점이 나타내는 수가 6 일 때 a 의 값을 구하여라.
(단, $a > b$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 11

해설

a, b 두 점의 한 가운데 있는 점이 6 일 때, 두 점 사이의 거리가 10 이므로 6 을 기준점으로 오른쪽으로 5만큼 이동한 점과 왼쪽으로 5만큼 이동한 점이된다. 따라서 두 수는 1, 11 이므로 큰 수 $a = 11$ 이다.

19. 점 A는 -5 보다 a 가 큰 수에 대응하고, B는 7 보다 3 이 큰 수에 대응한다고 할 때, 두 점 A, B에서 같은 거리에 있는 점을 C(4)라고 한다. 여기에서의 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

점 B는 7 보다 3 이 큰 수에 대응하므로 10 이 된다. 두 점 A, B에서 같은 거리에 있는 점을 C(4)라고 한다면 점 B는 점 C를 기준으로 하여 오른쪽으로 6 만큼 이동한 점이다. 그러므로 점 A는 점 C를 기준으로 하여 왼쪽으로 6 만큼 이동한 점이다. -5 에서 오른쪽으로 a 만큼 큰 수는 -2 가 된다. 따라서 a 의 값은 3 이다.

20. $|a| = 7$, $|b| = 11$ 인 두 정수 a , b 에 대하여 $a - b$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 하자. 이때, $M - m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 36

해설

$|7| = |-7| = 7$ 이므로

$a = 7$ 또는 $a = -7$ 이고

$|11| = |-11| = 11$ 이므로

$b = 11$ 또는 $b = -11$ 이다.

따라서 가능한 (a, b) 의 순서쌍은 $(7, 11)$, $(7, -11)$, $(-7, 11)$, $(-7, -11)$ 이다.

각각의 경우, $a - b$ 을 다음과 같이 구할 수 있다.

(i) $(a, b) = (7, 11)$ 일 때,

$a - b = 7 - 11 = -4$ 이다.

(ii) $(a, b) = (7, -11)$ 일 때,

$a - b = 7 - (-11) = 7 + 11 = 18$ 이다.

(iii) $(a, b) = (-7, 11)$ 일 때,

$a - b = -7 - 11 = -18$ 이다.

(iv) $(a, b) = (-7, -11)$ 일 때,

$a - b = -7 - (-11) = -7 + 11 = 4$ 이다.

따라서, $a - b$ 의 최댓값 M 과 최솟값 m 은 $M = 18$, $m = -18$ 이다.

$\therefore M - m = 18 - (-18) = 18 + 18 = 36$