1. 두 다항식 $A,\ B$에 대하여 연산 $A \ominus B$와 $A \otimes B$을 다음과 같이 정의하기로 한다.

$A \ominus B = A - 3B,\ A \otimes B = (A+B)B$

$P = 2x^3 + 2x^2y + 3xy^2 - y^3,\ Q = x^3 + x^2y + xy^2$이라 할 때, $(P \ominus Q) \otimes Q$를 x, y에 관한 다항식으로 나타내면?

① $x^4y^2 + xy^5$ ② $x^4y^2 - xy^5$ ③ $x^3y^2 - xy^4$

④ $x^3y^2 + xy^4$ ⑤ $2x^3y^2 - xy^4$

해설

정의에 따라 $(P \ominus Q) \otimes Q$를 변형하면

$$\begin{aligned}(P \ominus Q) \otimes Q &= (P-3Q) \otimes Q \\ &= (P-3Q+Q)Q \\ &= (P-2Q)Q \quad \cdots \text{①}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&P-2Q \\ &= 2x^3 + 2x^2y + 3xy^2 - y^3 - 2(x^3 + x^2y + xy^2) \\ &= xy^2 - y^3\end{aligned}$$

이므로 ①식은

$$\begin{aligned}(P \ominus Q) \otimes Q &= (xy^2 - y^3)(x^3 + x^2y + xy^2) \\ &= x^4y^2 + x^3y^3 + x^2y^4 - x^3y^3 \\ &\quad - x^2y^4 - xy^5 \\ &= x^4y^2 - xy^5\end{aligned}$$

2. $(6x^3 - x^2 - 5x + 5) \div (2x - 1)$의 몫을 a, 나머지를 b라 할 때, $a + b$를 구하면?

① $3x^2 + x + 1$　② $x^2 + x + 1$　③ $3x^2 + 1$
④ $x^2 + x - 1$　⑤ $3x^2 + x$

해설

나눗셈을 이용하면 $a = 3x^2 + x - 2$, $b = 3$
$\therefore\ a + b = 3x^2 + x + 1$

해설

조립제법을 이용할 수 있다.

이 때, $2x - 1$로 나눈 몫은 $x - \frac{1}{2}$로 나눈 몫의 $\frac{1}{2}$이고 나머지는 같다.

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(x - \frac{1}{2}\right) Q(x) + R \\ &= (2x - 1) \cdot \frac{1}{2} \cdot Q(x) + R \end{aligned}$$

3. 다항식 $f(x)$를 $2x^2+3x+2$로 나누었더니 몫이 $3x-4$이고, 나머지가 $2x+5$이었다. 이 때, $f(1)$의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 3 ⑤ 5

해설

$f(x)=(2x^2+3x+2)(3x-4)+(2x+5)$

$=6x^3+9x^2+6x-8x^2-12x-8+2x+5$

$=6x^3+x^2-4x-3$

$\therefore\ f(1)=6+1-4-3=0$

해설

$f(x)=(2x^2+3x+2)(3x-4)+(2x+5)$

$f(1)=(2+3+2)(3-4)+(2+5)=-7+7=0$

4. 다항식 $6x^3-7x^2+17x-3$을 $3x-2$로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R이라 할 때, $Q(1)+R$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

$6x^3-7x^2+17x-3=(3x-2)Q(x)+R$

양변에 $x=1$을 대입하면, $13=Q(1)+R$

$\therefore\ Q(1)+R=13$

해설

$6x^3-7x^2+17x-3$를 $3x-2$로 직접 나누거나 조립제법을 이용하여 몫과 나머지를 구할 수 있다.

5. x에 대한 다항식 $(4x^2-3x+1)^5$을 전개하였을 때, 모든 계수들(상수항 포함)의 합은?

① 0　　② 16　　③ 32　　④ 64　　⑤ 1024

해설

$(4x^2-3x+1)^5$을 전개하여 x에 대한 내림차순으로 정리하면
$(4x^2-3x+1)^5 = a_0x^{10}+a_1x^9+a_2x^8+\cdots+a_9x+a_{10}$과 같이 된다.
여기서 모든 계수들의 합
$a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{10}$을 구하려면
$x=1$을 대입하면 된다.
즉, $(4-3+1)^5 = a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{10}$
모든 계수들의 합은 $2^5=32$

6. $\left(x^4-8x^2-9\right) \div \left(x^2-9\right)$ 를 계산하여라.

① x^2+1 ② x^2-1 ③ x^2+2

④ x^2-2 ⑤ x^2+3

해설

$x^4-8x^2-9=\left(x^2-9\right)\left(x^2+1\right)$

$\therefore$ (준식)$=x^2+1$

7. $x^3-6x^2+11x-6$을 인수분해 하면?

① $(x+1)(x-2)(x+3)$
② $(x-1)(x+2)(x+3)$
③ $(x-1)(x-2)(x-3)$
④ $(x+1)(x+2)(x-3)$
⑤ $(x-1)(x-2)(x+3)$

해설

인수정리를 이용하면
$f(1)=0,\ f(2)=0,\ f(3)=0$이므로
(준식)$=(x-1)(x-2)(x-3)$

8. $(a+1)(a^2-a+1) = a^3+1$을 이용하여 $\dfrac{1999^3+1}{1998\times1999+1}$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2000

해설

$a = 1999$라 하면

$1998\times1999+1 = (a-1)a+1 = a^2-a+1$

$$\therefore \frac{1999^3+1}{1998\times1999+1} = \frac{a^3+1}{a^2-a+1} = \frac{(a+1)(a^2-a+1)}{a^2-a+1} = a+1 = 2000$$

9. $x+y+z=1$, $xy+yz+zx=2$, $xyz=3$일 때, $(x+1)(y+1)(z+1)$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$(x+1)(y+1)(z+1)$
$= xyz+xy+yz+zx+x+y+z+1$
$= 7$

10. $(x-1)(x+2)(x-3)(x+4)$를 전개할 때, 각 항의 계수의 총합을 a, 상수항을 b라 할 때, $a+b$의 값을 구하면?

① 8 ② 15 ③ 24 ④ 36 ⑤ 47

해설

$(x-1)(x+2)(x-3)(x+4)$

$=(x^2+x-2)(x^2+x-12)(x^2+x=X(\text{치환}))$

$=(X-2)(X-12)$

$=X^2-14X+24$

$=(x^2+x)^2-14(x^2+x)+24$

$=x^4+2x^3-13x^2-14x+24$

$\therefore\ a=1+2-13-14+24=0,\ b=24$

$\therefore\ a+b=0+24=24$

해설

㉠ 각 항 계수의 총합 구하기

$x=1$대입, $a=0$

㉡ 상수항 구하기

$x=0$대입, $b=24$

11. k의 값에 관계없이 $(3k^2+2k)x-(k+1)y-(k^2-1)z$의 값이 항상 1일 때, $x+y+z$의 값은?

① -3　② 0　③ 3　④ 6　⑤ 8

해설

주어진 식을 k에 대하여 정리하면
$k^2(3x-z)+k(2x-y)-(y-z)=1$
위 식이 k의 값에 관계없이 성립하므로 k에 대한 항등식이다.

$$\begin{cases} 3x-z=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x-y=0 & \cdots\cdots ㉡ \\ z-y=1 & \cdots\cdots ㉢ \end{cases}$$

㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면
$x=1,\ y=2,\ z=3$
$\therefore\ x+y+z=6$

12. 세 실수 a, b, c에 대하여 $(a,\ b,\ c) = ab + bc$로 정의한다. 이때, 등식 $(x,\ a,\ y) - (2x,\ b,\ y) = (x,\ 2,\ y)$이 임의의 실수 x, y에 대하여 성립하도록 a, b의 값을 정하면?

① $a = 1,\ b = 2$ ② $a = 2,\ b = 2$ ③ $a = 2,\ b = 0$

④ $a = 0,\ b = 2$ ⑤ $a = 0,\ b = 0$

해설

기호의 정의에 따라서 주어진 식을 다시 쓰면

$(ax + ay) - (2bx + by) = 2x + 2y$

이 식을 x, y에 대하여 정리하면

$(a - 2b - 2)x + (a - b - 2)y = 0$

이 등식이 임의의 x, y에 대하여 성립하므로

$a - 2b - 2 = 0,\ a - b - 2 = 0$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a = 2,\ b = 0$

13. $2x^2+xy-3y^2+5x+5y+2$를 인수분해 하면$(x+ay+b)(2x+cy+d)$이다. 이 때, $a+b+c+d$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$$2x^2+xy-3y^2+5x+5y+2$$
$$=2x^2+(y+5)x-3y^2+5y+2$$
$$=2x^2+(y+5)x-(y-2)(3y+1)$$
$$=\{x-(y-2)\}\{2x+(3y+1)\}$$
$$=(x-y+2)(2x+3y+1)$$
$$\therefore\ a=-1, b=2, c=3, d=1$$

14. $a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)$을 인수분해하면?

① $-(a-b)(b-c)(c-a)$

② $(a-b)(b-c)(a-c)$

③ $-(b-a)(b-c)(c-a)$

④ $(a-b)(b-c)(c-a)$

⑤ $(a-b)(b-c)(c+a)$

해설

$$
\begin{aligned}
(\text{준식}) &= (c-b)a^2+(b^2-c^2)a+bc(c-b)\\
&= (c-b)\{a^2-(c+b)a+bc\}\\
&= (c-b)(a-b)(a-c)\\
&= (a-b)(b-c)(c-a)
\end{aligned}
$$

15. 두 다항식 $x^3 + 2x^2 - x - 2$,
$(x-1)\left(3x^2 + ax + 2a\right)$ 의 최대공약수가 이차식이 되도록 상수 a의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = -3$

해설

$x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x-1)(x+2)(x+1)$
$\therefore 3x^2 + ax + 2a$는
$x+2$ 또는 $x+1$을 인수로 가져야 한다.
$f(x) = 3x^2 + ax + 2a$로 놓을 때
$x+2$가 인수이면 $f(-2) = 12 - 2a + 2a = 12$가 되어 적합하지 않다.
$\therefore x+1$를 인수로 갖는다.
$x+1$이 인수이면 $f(-1) = 3 - a + 2a = 3 + a = 0$
$\therefore a = -3$

16. 두 다항식 x^3+2x^2-x-2, $2x^3+(a-2)x^2+ax-2a$의 최대공약수가 이차식이 되도록 상수 a의 값을 정하면?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

$x^3+2x^2-x-2=(x-1)(x+1)(x+2)$
$2x^3+(a-2)x^2+ax-2a=(x-1)(2x^2+ax+2a)$
최대공약수가 이차식이 되기 위해서는
$f(x)=2x^2+ax+2a$가 $x+1$
또는 $x+2$를 인수로 가져야 한다.
그런데 $f(-2)=8-2a+2a\neq 0$이므로
$f(x)$는 $x+2$를 인수로 가지지 않는다.
따라서, $f(-1)=2-a+2a=0$ $\therefore$ $a=-2$

17. 이차항의 계수가 1 인 두 다항식의 최대공약수가 $x-1$, 최소공배수가 x^3-kx+6 일 때, 두 다항식의 합은?

① $2x^2-3x-5$ ② $2x^2-3x+1$ ③ $2x^2-x-1$

④ $2x^2+x-3$ ⑤ $2x^2+2x-4$

해설

최소공배수는 최대공약수를 인수로 가지므로

$x=1$ 일 때 $1-k+6=0$ $\therefore k=7$

$x^3-7x+6=(x-1)(x-2)(x+3)$ 이므로

두 다항식은 $(x-1)(x-2)$, $(x-1)(x+3)$

$\therefore$ 두 다항식의 합은 $2x^2-x-1$

18. 다음 다항식의 일차항의 계수는?

$$(1+x+x^2)^2(1+x)+(1+x+x^2+x^3)^3$$

① 3　② 4　③ 5　④ 6　⑤ 7

해설

i) $(1+x+x^2)^2(x+1)$ 의 일차항의 계수

: $(1+x+x^2)^2$ 의 일차항에 1을 곱할 때,

계수$=2$

: $(1+x+x^2)^2$ 의 상수항에 x를 곱할 때,

계수$=1$

ii) $(1+x+x^2+x^3)^3$ 의 일차항의 계수

$x+x^2+x^3=Y$라 하면,

$(Y+1)^3=Y^3+3Y^2+3Y+1$

$3Y=3x+3x^2+3x^3$

일차항의 계수$=3$, 다른 항에는 일차항이 없다.

i), ii) 에서 $2+1+3=6$

19. 1985년부터 1995년까지 5년 간격으로 조사한 우리나라의 농가인구 비율 P는 다음과 같은 식으로 나타낼 수 있다.

연도	85	90	95
인구비율(%)	20.9	15.5	10.8
인구(1000명)	8521	6661	4851

$P = 0.35t^2 - 5.75t + 20.9$

이 때, $t = 0$은 1985년을 나타낸다. 이 식을 $t = 0$이 1990년을 나타내도록 변형하면?

① $P = 0.35t^2 - 5.75t + 20.9$

② $P = 0.35(t+1)^2 - 5.75(t+1) + 20.9$

③ $P = 0.35(t-1)^2 - 5.75(t-1) + 20.9$

④ $P = 0.35(t+2)^2 - 5.75(t+2) + 20.9$

⑤ $P = 0.35(t-2)^2 - 5.75(t-2) + 20.9$

해설

$P_1(t) = 0.35t^2 - 5.75t + 20.9$일 때,

$t = 0 \rightarrow 1985$년, $t = 1 \rightarrow 1990$년, $t = 2 \rightarrow 1995$년

$P_2(t) = 0.35(t+1)^2 - 5.75(t+1) + 20.9$이면,

$P_2(0) = P_1(1)$이므로 $P_2(t)$에서

$t = 0 \rightarrow 1990$년임을 알 수 있다.

20. 1999개의 다항식 x^2-2x-1, x^2-2x-2, $\cdots$, $x^2-2x-1999$ 중에서 계수가 정수인 일차식의 곱으로 인수분해 되는 것은 모두 몇 개인가?

① 43개 ② 44개 ③ 45개 ④ 46개 ⑤ 47개

해설

$x^2-2x-n=(x+a)(x-b)$ (a, b는 자연수)라 하면 ($1 \le n \le 1999$인 자연수)

$ab=n$, $a=b-2$

$\therefore n=1\cdot 3,\ 2\cdot 4,\ 3\cdot 5,\ \cdots,\ 43\cdot 45(=1935)$의 43개

21. 다음 식을 인수분해 하면 $(x+py)(x+qy+r)^2$ 이다. 이 때, $p^2+q^2+r^2$ 의 값을 구하여라.

$[x^3-y^3+x^2y-xy^2+2x^2-2y^2+x-y]$

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$$x^3-y^3+x^2y-xy^2+2x^2-2y^2+x-y$$
$$=(x-y)(x^2+xy+y^2)+xy(x-y)+2(x+y)(x-y)+(x-y)$$
$$=(x-y)\{(x+y)^2+2(x+y)+1\}$$
$$=(x-y)(x+y+1)^2$$
$$p=-1, q=1, r=1$$
$$\therefore\ p^2+q^2+r^2=3$$

22. 삼각형의 세변의 길이를 $x,\ y,\ z$라 할 때, 이들 사이에 다음의 관계가 성립한다면 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

$$x^2yz + x^3z - xy^2z + xz^3 - y^3z + yz^3 = 0$$

① x가 빗변인 직각삼각형

② y가 빗변인 직각삼각형

③ z가 빗변인 직각삼각형

④ $x = y$인 이등변삼각형

⑤ $x = y,\ z$가 빗변인 직각삼각형

해설

$(x^2y + x^3 - xy^2 + xz^2 - y^3 + yz^2)z$

$= \{x^2(x+y) + (x+y)z^2 - (x+y)y^2\}z$

$= (x+y)(x^2+z^2-y^2)z$

$\therefore\ (x+y)(x^2+z^2-y^2)z = 0$

$x^2+z^2-y^2 = 0$ ($\because$ $x,\ y,\ z$는 모두 양수)

$\therefore\ x^2+z^2 = y^2 \Rightarrow y$가 빗변인 직각삼각형

23. $x^2 - x - 1 = 0$ 일 때, $x^3 - \dfrac{1}{x^3}$ 의 값과 $y + \dfrac{1}{y} = 1$ 일 때, $\dfrac{y^{10}+1}{y^2}$ 의 값은?

① 4, −1　② 4, 18　③ 8, −1　④ 9, −1　⑤ 4, 27

해설

(1) $x^2 - x - 1 = 0$ 의 양변을 x 로 나누면

$$x - 1 - \frac{1}{x} = 0$$

$$\therefore\ x - \frac{1}{x} = 1$$

$$\therefore\ x^3 - \frac{1}{x^3} = \left(x - \frac{1}{x}\right)^3 + 3x \cdot \frac{1}{x}\left(x - \frac{1}{x}\right)$$

$$= 1^3 + 3 \cdot 1 \cdot 1 = 4$$

(2) $y + \dfrac{1}{y} = 1$ 일 때

$y + \dfrac{1}{y} = 1$ 에서 $\dfrac{y^2+1}{y} = 1$

$\therefore\ y^2 - y + 1 = 0 \cdots\cdots$ ㉠

양변에 $(y+1)$ 을 곱하면 $(y+1)(y^2 - y + 1) = 0$

$y^3 + 1 = 0\ \therefore\ y^3 = -1 \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서

$$\frac{y^{10}+1}{y^2} = \frac{(y^3)^3 \cdot y + 1}{y^2} = \frac{-y+1}{y^2}$$

$$= \frac{-y^2}{y^2} = -1$$

24. 세 실수 a, b, c가 $a+b+c=3,\ a^2+b^2+c^2=9,\ a^3+b^3+c^3=24$를 만족시킬 때, $a^4+b^4+c^4+1$의 값을 구하면?

① 69　② 70　③ 71　④ 72　⑤ 73

해설

$a+b+c=3 \cdots ①$
$a^2+b^2+c^2=9 \cdots ②$
$a^3+b^3+c^3=24 \cdots ③$ 이라 하면,
②식에서
$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)=9$
$9-2(ab+bc+ca)=9$
$\therefore\ ab+bc+ca=0 \quad \cdots ④$
③식에서
$a^3+b^3+c^3$
$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$
$24=3\cdot(9-0)+3abc$
$\therefore\ abc=-1 \quad \cdots ⑤$
$a^4+b^4+c^4+1$
$=(a^2+b^2+c^2)^2-2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+1$
$=81-2\cdot 6+1=70$
$(\because\ a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$
$=(ab+bc+ca)^2-2abc(a+b+c)$
$=0-2\times(-1)\times 3$
$=6)$

25. x 에 관한 두 삼차식 $P = x^3 + ax^2 + 2x - 1,\ Q = x^3 + bx^2 + 1$ 이 이차식의 최대공약수를 가질 때, $2a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -4

해설

$P - Q = (a - b)x^2 + 2x - 2 \cdots$ ㉠
$P + Q = x\left\{2x^2 + (a + b)x + 2\right\} \cdots$ ㉡
$P,\ Q$ 의 최대공약수를 G 라 하면,
G 는 $P - Q$ 와 $P + Q$ 의 공약수이다.
그런데 G 는 이차이고, $P,\ Q$ 에는
x 라는 약수가 없으므로 ㉠, ㉡에서 G 는
$(a - b)x^2 + 2x - 2$ 이고 $2x^2 + (a + b)x + 2$ 이다.
$\therefore\ a - b = -2,\ a + b = -2$
$\therefore\ a = -2,\ b = 0$
$\therefore\ 2a + b = -4$