1. $\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{3}$ 을 만족하는 모든 실수 x, y에 대하여 항상 $ax+by+5=0$이다. 이때 $a+b$의 값을 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{3}=t$라 하면

$x=2t-1,\ y=3t+1$

이것을 $ax+by+5=0$에 대입하면

$a(2t-1)+b(3t+1)+5=0$

$(2a+3b)t+(-a+b+5)=0$

이 식이 모든 실수 t에 대하여 성립해야 하므로

$2a+3b=0 \cdots ①$

$-a+b+5=0 \cdots ②$

①, ②를 연립하여 풀면

$a=3,\ b=-2 \quad \therefore\ a+b=3+(-2)=1$

해설

$\frac{A}{B}=\frac{C}{D} \Leftrightarrow AD=BC$ 성질 이용

$3x+3=2y-2$

$3x-2y+5=0$은 $ax+by+5=0$

$\therefore a=3,\ b=-2$

2. 다음 등식을 만족하는 실수 $x+y$ 의 값을 구하시오.

$$3x+3+(2y-9)i=9+5i$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

복소수가 서로 같을 조건에서

$3x+3=9,\ 2y-9=5$

이것을 연립하여 풀면 $x=2,\ y=7$

3. $a = 2 + \sqrt{3}i,\ b = 2 - \sqrt{3}i$ 일 때, $\dfrac{b}{a} + \dfrac{a}{b}$ 의 값을 구하여라. (단, $i = \sqrt{-1}$)

▶ 답 :

▷ 정답 : $\dfrac{2}{7}$

해설

$a = 2 + \sqrt{3}i,\ b = 2 - \sqrt{3}i$ 일 때

$\dfrac{b}{a} + \dfrac{a}{b} = \dfrac{b^2 + a^2}{ab} = \dfrac{(a+b)^2 - 2ab}{ab} \cdots ㉠$

이 때, $a + b = (2 + \sqrt{3}i) + (2 - \sqrt{3}i) = 4$

$ab = (2 + \sqrt{3}i)(2 - \sqrt{3}i)$

$= 2^2 - (\sqrt{3}i)^2 = 4 + 3 = 7$ 이므로

$a + b = 4,\ ab = 7$ 을 ㉠에 대입하면

$\dfrac{b}{a} + \dfrac{a}{b} = \dfrac{(a+b)^2 - 2ab}{ab}$

$= \dfrac{16 - 14}{7} = \dfrac{2}{7}$

4. 이차방정식 $x^2-6x+k=0$이 중근을 가질 때, 실수 k의 값은?

① 1 ② 3 ③ 6 ④ 9 ⑤ 36

해설

주어진 이차방정식이 중근을 가지므로

$$\frac{D}{4}=(-3)^2-1\cdot k=0$$

$$\therefore\ k=9$$

5. 이차함수 $y = -\frac{1}{3}(x-2)^2 + 3$에 대한 설명으로 옳은 것은?

① $x = -2$일 때, 최댓값 3을 갖는다.

② $x = -2$일 때, 최솟값 3을 갖는다.

③ $x = 2$일 때, 최댓값 3을 갖는다.

④ $x = 2$일 때, 최솟값 3을 갖는다.

⑤ $x = -\frac{1}{3}$일 때, 최댓값 3을 갖는다.

해설

$x = 2$일 때, 최댓값 3을 갖는다.

6. 이차함수$y = -2 + 3x - x^2$ $(-1 \le x \le 2)$ 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하면?

① $-\frac{23}{4}$　② $-\frac{16}{3}$　③ $-\frac{3}{4}$　④ $\frac{7}{4}$　⑤ $\frac{11}{3}$

해설

$y = -(x - \frac{3}{2})^2 + \frac{1}{4}$ 이므로

$x = \frac{3}{2}$ 가 x의 값의 범위 $-1 \le x \le 2$ 에 포함되므로

$x = \frac{3}{2}$ 에서 최솟값 $\frac{1}{4}$ 를 갖고,

$x = -1$ 에서 최댓값 -6을 갖는다.

따라서 최솟값과 최댓값의 합은 $-\frac{23}{4}$ 이다.

7. 부등식 $ax+1 \geq 2x+5$의 해가 $x \geq 2$일 때, 상수 a의 값은?

① -3 ② -1 ③ 1 ④ 4 ⑤ 7

해설

$ax+1 \geq 2x+5$에서 $(a-2)x \geq 4$ 의 부등식의 해가 $x \geq 2$이므로

$a-2>0$

$x \geq \dfrac{4}{a-2}$이므로 $\dfrac{4}{a-2}=2,\ a-2=2$

$\therefore a=4$

8. 두 다항식 A, B에 대하여 연산 $A \ominus B$와 $A \otimes B$을 다음과 같이 정의하기로 한다.

$A \ominus B = A - 3B,\ A \otimes B = (A+B)B$

$P = 2x^3 + 2x^2y + 3xy^2 - y^3,\ Q = x^3 + x^2y + xy^2$이라 할 때, $(P \ominus Q) \otimes Q$를 x, y에 관한 다항식으로 나타내면?

① $x^4y^2 + xy^5$　② $x^4y^2 - xy^5$　③ $x^3y^2 - xy^4$

④ $x^3y^2 + xy^4$　⑤ $2x^3y^2 - xy^4$

해설

정의에 따라 $(P \ominus Q) \otimes Q$를 변형하면

$$\begin{aligned}(P \ominus Q) \otimes Q &= (P - 3Q) \otimes Q \\ &= (P - 3Q + Q)Q \\ &= (P - 2Q)Q \quad \cdots \text{①}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&P - 2Q \\ &= 2x^3 + 2x^2y + 3xy^2 - y^3 - 2(x^3 + x^2y + xy^2) \\ &= xy^2 - y^3\end{aligned}$$

이므로 ①식은

$$\begin{aligned}(P \ominus Q) \otimes Q &= (xy^2 - y^3)(x^3 + x^2y + xy^2) \\ &= x^4y^2 + x^3y^3 + x^2y^4 - x^3y^3 \\ &\quad - x^2y^4 - xy^5 \\ &= x^4y^2 - xy^5\end{aligned}$$

9. $(2x^3-3x^2+3x+4)(3x^4+2x^3-2x^2-7x+8)$을 전개한 식에서 x^3의 계수는?

① 31 ② 33 ③ 35 ④ 37 ⑤ 39

해설

$2x^3\times 8-3x^2\times(-7x)+3x\times(-2x^2)+4\times 2x^3=39x^3$

10. 다음 중 다항식 $x^4 - 5x^2 + 4$를 인수분해 할 때, 나타나는 인수가 <u>아닌</u> 것은?

① $x-1$　② $x-2$　③ $x-3$　④ $x+1$　⑤ $x+2$

해설

$$\begin{aligned} x^4 - 5x^2 + 4 &= (x^2-1)(x^2-4) \\ &= (x+1)(x-1)(x+2)(x-2) \end{aligned}$$

11. 다음 중 다항식 $x^4 - 8x^2 - 9$의 인수가 아닌 것은?

① $x - 3$ ② $x + 3$

③ $x^2 + 1$ ④ $x^2 + 9$

⑤ $x^3 + 3x^2 + x + 3$

해설

준 식을 인수분해 하면

$$x^4 - 8x^2 - 9 = (x^2 + 1)(x^2 - 9)$$
$$= (x^2 + 1)(x + 3)(x - 3)$$

⑤ $x^2(x + 3) + x + 3 = (x^2 + 1)(x + 3)$

12. 사차방정식 $x(x-1)(x+1)(x+2)-8=0$ 의 모든 해의 곱을 구하면?

① -8 ② -2 ③ 1 ④ 4 ⑤ 8

해설

$x(x-1)(x+1)(x+2)-8=0$
$\{x(x+1)\}\{(x-1)(x+2)\}-8=0$
$(x^2+x)(x^2+x-2)-8=0$
$x^2+x=t$ 라 하면, $t(t-2)-8=0$
$\therefore\ t^2-2t-8=x^4+2x^3-x^2-2x-8=0$
근과 계수와의 관계에 의해서, 근을 $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$ 라 하면 $\therefore$ 모든 해의 곱은 -8

해설

근과 계수의 관계에서 모든 해의 곱을 나타내는 것은 다항식을 전개했을 때의 상수항이므로 -8 (단, 다항식의 최고차항의 차수가 홀수일 때는 상수항의 부호를 반대로 바꾼것이 모든 해의 곱이다.)

13. 방정식 $x^3 - x^2 + ax - 1 = 0$의 한 근이 -1일 때, 상수 a의 값과 나머지 두 근을 구하면?

① $a = 3, 1 \pm \sqrt{2}$ ② $a = -3, 1 \pm \sqrt{2}$

③ $a = 3, 1 \pm \sqrt{3}$ ④ $a = -3, 1 \pm \sqrt{3}$

⑤ $a = -1, 1 \pm \sqrt{2}$

해설

$x = -1$이 근이므로 $-1 - 1 - a - 1 = 0$에서 $a = -3$
인수정리와 조립제법을 이용하면
(좌변) $= (x+1)(x^2 - 2x - 1) = 0$
$x^2 - 2x - 1 = 0$의 근은 $1 \pm \sqrt{2}$
$\therefore a = -3$, 나머지 근은 $1 \pm \sqrt{2}$

14. x, y에 대한 연립방정식 $\begin{cases} ax - y = a \\ x - ay = 1 \end{cases}$ 이 오직 한 쌍의 해를 갖도록 하는 a값은?

① $a = -1$

② $a = 1$

③ $a = \pm 1$

④ $a \neq \pm 1$인 모든 실수

⑤ 없다.

해설

연립방정식이 오직 한 쌍의 해를 가지려면

$\frac{a}{1} \neq \frac{-1}{-a}$, $-a^2 \neq -1$

$\therefore \ a \neq \pm 1$

따라서 오직 한 쌍의 해를 갖도록 하는

a의 값은 $a \neq \pm 1$인 모든 실수이다.

15. $f(x)$를 $x-1$, $x-2$로 나눈 나머지가 각각 3, 5일 때, $f(x)$를 x^2-3x+2로 나눈 나머지를 구하면?

① $2x+1$ ② $2x+3$ ③ $2x-1$

④ $2x$ ⑤ $2x-3$

해설

x^2-3x+2로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$라 하면 $f(x)=(x^2-3x+2)Q(x)+ax+b$

그런데 $f(1)=3$, $f(2)=5$이므로

$a+b=3$, $2a+b=5$

$\therefore\ a=2,\ b=1$

따라서, 구하는 나머지는 $2x+1$

16. 이차방정식 $x^2-(k-1)x+k=0$의 두 근의 비가 $2:3$일 때, 실수 k 값의 곱을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

두 근의 비가 $2:3$이므로 두 근을 $2\alpha,\ 3\alpha$라 하면

$2\alpha+3\alpha=5\alpha=k-1 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$(2\alpha)(3\alpha)=6\alpha^2=k \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠에서 $\alpha=\dfrac{k-1}{5}$,

이것을 ㉡에 대입하면 $6k^2-37k+6=0$

$\therefore\ k=6,\ \dfrac{1}{6}$

17. 이차함수 $y=-x^2+ax$ 의 최댓값이 4 일 때, 상수 a 의 값을 구하여라. (단, $a>0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$$y=-x^2+ax=-\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{a^2}{4}$$

$x=\frac{a}{2}$ 일 때, 최댓값이 $\frac{a^2}{4}$ 이므로

$\frac{a^2}{4}=4,\ a=\pm 4$

$a>0$ 이므로 $a=4$ 이다.

18. 이차함수 $y = -x^2 + 4ax + a - 2$ 의 최댓값을 M 이라 할 때, M 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $-\dfrac{33}{16}$

해설

$$\begin{aligned} y &= -x^2 + 4ax + a - 2 \\ &= -(x^2 - 4ax) + a - 2 \\ &= -(x - 2a)^2 + 4a^2 + a - 2 \end{aligned}$$

최댓값 $M = 4a^2 + a - 2$

$$\begin{aligned} &= 4\left(a^2 + \frac{1}{4}a\right) - 2 \\ &= 4\left(a + \frac{1}{8}\right)^2 - \frac{1}{16} - 2 \\ &= 4\left(a + \frac{1}{8}\right)^2 - \frac{33}{16} \end{aligned}$$

따라서 M 의 최솟값은 $-\dfrac{33}{16}$ 이다.

19. 어떤 공장에서 A, B의 두 제품을 생산하고 있다. A제품의 생산량은 작년에 비하여 20% 증가하였고, B제품은 25% 증가하였다. 올해 총 생산량이 작년보다 16개 늘어나 총 86개일 때, 작년의 B제품의 생산량을 구하면?

▶ 답 : ____ 개

▷ 정답 : 40 개

해설

작년 두 제품의 생산량을 차례로 a, b라고 하면,
올해는 각각 $1.2a$, $1.25b$이다.
$a+b=70$, $1.2a+1.25b=86$
연립하여 풀면, $a=30$, $b=40$

20. 삼각형의 세 변의 길이 a, b, c가 $b^3 - ac^2 + a^2b + ab^2 + a^3 - bc^2 = 0$인 관계를 만족할 때, 이 삼각형의 모양은?

① 정삼각형　　② 직각삼각형

③ 이등변삼각형　　④ 둔각삼각형

⑤ 직각이등변삼각형

해설

차수가 가장 낮은 c에 대한 내림차순으로 정리한 뒤 인수분해한다.

$-(a+b)c^2 + a^3 + a^2b + b^3 + ab^2 = 0$

$-(a+b)c^2 + a^2(a+b) + b^2(a+b) = 0$

$-(a+b)(c^2 - a^2 - b^2) = 0$

$(a+b \neq 0)$

$c^2 - a^2 - b^2 = 0$

$\therefore c^2 = a^2 + b^2$

$\therefore\ C = 90°$인 직각삼각형