

1. $(x^3 + ax + 2)(x^2 + bx + 2)$ 를 전개했을 때, x^2 과 x^3 의 계수를 모두 0이 되게 하는 상수 a , b 에 대하여 $a + b$ 의 값은?

① -2

② -1

③ 1

④ 2

⑤ $\frac{3}{2}$

해설

$$\begin{aligned} & (x^3 + ax + 2)(x^2 + bx + 2) \\ &= x^5 + bx^4 + (a + 2)x^3 + (ab + 2)x^2 + (2a + 2b)x + 4 \\ & (x^2 \text{의 계수}) = (x^3 \text{의 계수}) = 0 \text{ 이므로} \\ & ab + 2 = 0, \quad a + 2 = 0 \\ & \text{따라서 } a = -2, \quad b = 1 \\ & \therefore a + b = -1 \end{aligned}$$

2. 등식 $2x^2 - 3x - 2 = a(x-1)(x-2) + bx(x-2) + cx(x-1)$ 가 x 값에 관계없이 항상 성립할 때, 상수 $a + b + c$ 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

양변에 $x = 0$ 을 대입하면

$$-2 = 2a \quad \therefore a = -1$$

양변에 $x = 1$ 을 대입하면

$$-3 = -b \quad \therefore b = 3$$

양변에 $x = 2$ 를 대입하면

$$0 = 2c \quad \therefore c = 0$$

$$\therefore a + b + c = 2$$

3. $(1+ai)^2 = 2i$ (a 는 실수)라 할 때 $(1+ai)(1-ai)$ 의 값을 구하시오.
(단, $i = \sqrt{-1}$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$(1+ai)^2 = 2i \text{ 에서 } (1-a^2) + 2ai = 2i$$

$$\text{복소수의 상등에서 } 1-a^2 = 0, 2a = 2$$

$$\therefore a = 1$$

$$\begin{aligned}\therefore (1+ai)(1-ai) &= (1+i)(1-i) \\ &= 1 - (-1) \\ &= 2\end{aligned}$$

4. 이차방정식 $x^2 + (m+1)x + m + 4 = 0$ 이 중근을 가질 때, 모든 실수 m 의 값의 합을 구하면?

① -3

② 0

③ 2

④ 3

⑤ 5

해설

중근을 가지므로, 판별식 $D = 0$

$$D = (m+1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (m+4) = m^2 - 2m - 15 = 0$$

$$(m-5)(m+3) = 0 \quad \therefore m = -3, 5$$

$$\therefore m \text{의 값의 합은 } -3 + 5 = 2$$

5. 이차방정식 $x^2 + 2x + k - 3 = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 가질 때, 정수 k 의 최대값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

서로 다른 두 실근을 갖으려면 판별식이 0보다 커야 한다.

$$D' = 1^2 - (k - 3) > 0$$

$$\therefore k < 4$$

$\therefore$ 최대값은 3 ($\because k$ 는 정수)

6. 연속하는 세 자연수의 합이 10 이상 20 미만이고, 큰 수의 3 배는 작은 두 수의 합보다 10 이상 클 때, 세 수 중 가장 큰 수는?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

연속하는 세 자연수를 $x-1$, x , $x+1$ 이라고 하면

$$\begin{cases} 10 \leq (x-1) + x + (x+1) < 20 \quad \cdots \textcircled{㉠} \\ (x-1) + x \leq 3(x+1) - 10 \quad \cdots \textcircled{㉡} \end{cases}$$

① 에서 $10 \leq 3x < 20$, $\therefore \frac{10}{3} \leq x < \frac{20}{3}$

② 에서 $2x-1 \leq 3x-7$, $-x \leq -6 \quad \therefore x \geq 6$

$6 \leq x < \frac{20}{3}$ 이므로 이를 만족하는 자연수는 6 이고, 세 자연수는 5, 6, 7 이다.

따라서, 세 수 중 가장 큰 수는 7 이다.

7. 모든 실수 x 에 대하여 부등식 $(m+2)x^2 - 2(m+2)x + 4 > 0$ 이 항상 성립하도록 할 때, 상수 m 의 값의 범위에 속한 정수의 개수는?

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

모든 실수 x 에 대하여 성립하기 위해서는

$$m \geq -2$$

$$D/4 = (m+2)^2 - 4(m+2) < 0 \text{ 이므로}$$

$$m^2 + 4m + 4 - 4m - 8 = m^2 - 4 < 0$$

따라서 $-2 \leq m < 2$ 이므로

만족하는 정수 m 의 개수는

$-2, -1, 0, 1$ 의 4개

8.
$$\begin{cases} x^2 - 3x \leq 0 \\ x^2 - 5x + 4 < 0 \end{cases}$$
을 만족하는 x 의 범위의 해가 $\alpha < x \leq \beta$ 일 때,
 $\alpha + \beta$ 의 값은?

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$x^2 - 3x \leq 0$ 에서
 $x(x - 3) \leq 0$ 이므로
 $0 \leq x \leq 3 \cdots (가)$
 $x^2 - 5x + 4 < 0$ 에서
 $(x - 1)(x - 4) < 0$ 이므로
 $1 < x < 4 \cdots (나)$
 $(가), (나)$ 에 의해
 $1 < x \leq 3$ 이므로
 $\alpha = 1, \beta = 3$
 $\therefore \alpha + \beta = 4$

9. 다항식 $x^3 + ax^2 + bx + c$ 를 $x+2$ 로 나누면 3이 남고, x^2-1 로 나누면 떨어진다. 이 때, abc 의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$$\begin{aligned} x^3 + ax^2 + bx + c &= (x+2)Q_1(x) + 3 \\ &= (x+1)(x-1)Q_2(x) \end{aligned}$$

$$f(-2) = 3 \quad f(1) = 0 \quad f(-1) = 0$$

$$x = -2 \text{ 대입, } -8 + 4a - 2b + c = 3$$

$$x = -1 \text{ 대입, } -1 + a - b + c = 0$$

$$x = 1 \text{ 대입, } 1 + a + b + c = 0$$

세 식을 연립해서 구하면

$$a = 3, b = -1, c = -3$$

$$\therefore abc = 9$$

10. 사차식 $x^4 - 10x^2y^2 + 9y^4$ 의 인수가 아닌 것은?

① $x - 3y$

② $x - 2y$

③ $x - y$

④ $x + y$

⑤ $x + 3y$

해설

$$\begin{aligned}x^4 - 10x^2y^2 + 9y^4 &= (x^2 - 9y^2)(x^2 - y^2) \\&= (x - 3y)(x + 3y)(x - y)(x + y)\end{aligned}$$

11. 자연수 $N = 35^3 + 3 \cdot 35^2 + 3 \cdot 35 + 1$ 의 양의 약수의 개수를 구하여라.(인수분해공식을 이용하여 푸시오.)

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 49 개

해설

$$\begin{aligned} a^3 + 3a^2 + 3a + 1 &= (a + 1)^3 \\ \therefore N &= 35^3 + 3 \cdot 35^2 + 3 \cdot 35 + 1 \\ &= (35 + 1)^3 = 36^3 = 2^6 \times 3^6 \\ \therefore \text{약수의 개수} &= (6 + 1) \times (6 + 1) = 49 \end{aligned}$$

12. $a + b + c = 4$, $ab + bc + ca = 3$, $abc = 1$ 일 때, $a^3 + b^3 + c^3$ 의 값을 구하면?

① 30

② 31

③ 32

④ 33

⑤ 34

해설

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$$

$$\text{위 식에 따라 } a^2 + b^2 + c^2 + 6 = 16$$

$$\therefore a^2 + b^2 + c^2 = 10$$

$$a^3 + b^3 + c^3$$

$$= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) + 3abc$$

$$= 4 \times (10 - 3) + 3 \times 1$$

$$= 31$$

13. 이차방정식 $x^2 - 3x + 1 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $\alpha + \frac{1}{\beta}, \beta + \frac{1}{\alpha}$ 을 두 근으로 하고 이차항의 계수가 1인 이차방정식을 구하면?

① $x^2 - 6x + 4 = 0$

② $x^2 - 3x + 4 = 0$

③ $x^2 + 6x + 5 = 0$

④ $x^2 + 4x + 5 = 0$

⑤ $x^2 - 4x + 5 = 0$

해설

$x^2 - 3x + 1 = 0$ 의 두 근이 α, β 이므로 $\alpha + \beta = 3, \alpha\beta = 1$

두 근의 합 : $\left(\alpha + \frac{1}{\beta}\right) + \left(\beta + \frac{1}{\alpha}\right)$

$$= \alpha + \beta + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 3 + \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = 3 + 3 = 6$$

두 근의 곱 : $\left(\alpha + \frac{1}{\beta}\right)\left(\beta + \frac{1}{\alpha}\right)$

$$= \alpha\beta + 1 + 1 + \frac{1}{\alpha\beta} = \alpha\beta + \frac{1}{\alpha\beta} + 2 = 4$$

$\therefore$ 방정식은 $x^2 - 6x + 4 = 0$

14. 유리수 a, b 에 대하여 곡선 $y = x^2 - a$ 와 $y = bx$ 가 두 점 P, Q 에서 만난다. 점 P 의 x 좌표가 $\sqrt{5} + 1$ 일 때, $a + b$ 의 값을 구하면?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

두 곡선 $y = x^2 - a$ 와 $y = bx$ 의 교점의 x 좌표는 $x^2 - bx - a = 0$ 의 두 근이다.

$\sqrt{5} + 1$ 이 근이므로, $-\sqrt{5} + 1$ 도 근이다.

근과 계수의 관계에 의해

$$b = \sqrt{5} + 1 - (-\sqrt{5} + 1) = 2$$

$$-a = (\sqrt{5} + 1)(-\sqrt{5} + 1) = -4$$

$$\therefore a = 4 \quad \therefore a + b = 6$$

15. 이차함수 $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + m + 10$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1 만큼 , y 축의 방향으로 3 만큼 평행이동하였더니 최솟값이 5 가 되었다. 이때, 상수 m 의 값을 구하면?

① -16 ② -10 ③ -6 ④ 2 ⑤ 8

해설

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2}x^2 - 2x + m + 10 \\ &= \frac{1}{2}(x^2 - 4x + 4 - 4) + m + 10 \\ &= \frac{1}{2}(x - 2)^2 + 8 + m \end{aligned}$$

x 축의 방향으로 1 만큼 , y 축의 방향으로 3 만큼 평행이동한 식은

$$y = \frac{1}{2}(x - 2 - 1)^2 + 8 + m + 3 = \frac{1}{2}(x - 3)^2 + 11 + m$$

최솟값이 5 이므로 $11 + m = 5$ 에서 $m = -6$ 이다.

16. 가로와 세로의 길이의 합이 12 인 직사각형의 넓이를 y 라고 할 때, y 의 최댓값을 구하면?

① 36 ② 16 ③ 12 ④ 10 ⑤ 8

해설

가로의 길이를 x 라고 두면 세로의 길이는 $12 - x$ 이다.

$$y = x \times (12 - x)$$

$$= -x^2 + 12x$$

$$= -(x^2 - 12x + 36) + 36$$

$$= -(x - 6)^2 + 36$$

따라서 36이 최댓값이다.

17. $x^3 - 1 = 0$ 의 한 허근을 ω 라 할 때, 다음 중 옳은 것을 모두 고른 것은?
(단, $\bar{\omega}$ 는 ω 의 켤레복소수이다.)

$\textcircled{\text{㉠}} \omega^6 = 1$	$\textcircled{\text{㉡}} \omega^2 = \bar{\omega}$
$\textcircled{\text{㉢}} \omega + \bar{\omega} = -1$	$\textcircled{\text{㉣}} \omega^2 + \omega = -1$

- ① ㉠, ㉡

② ㉠, ㉢

③ ㉠, ㉢, ㉣
- ④ ㉡, ㉢, ㉣

⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉣

해설

$x^3 - 1 = 0$ 의 한 허근이 ω 이므로,
 $\omega^3 = 1, (x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$
 $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ 켤레근 $\bar{\omega}$ 일 경우도
 $\bar{\omega}^3 = 1, \bar{\omega}^2 + \bar{\omega} + 1 = 0$
 $\textcircled{\text{㉠}} \omega^3 = 1, (\omega^3)^2 = 1 \rightarrow (\text{O})$
 $\textcircled{\text{㉢}} \omega + \bar{\omega} = -1,$
 $\bar{\omega} = -1 - \omega = -(\omega + 1)$
 $\omega^2 + \omega + 1$ 을 이용.
 $\omega + 1 = -\omega^2$ 이므로 $\bar{\omega} = \omega^2 \rightarrow (\text{O})$
 $\textcircled{\text{㉡}}$ 두 근 $\omega, \bar{\omega}$ 의 합은
 $x^2 + x + 1 = 0$ 의 두 근의 합이므로
 $\omega + \bar{\omega} = -1$
 $\textcircled{\text{㉣}} \omega^2 + \omega + 1 = 0,$
 $\omega^2 + \omega = -1 \rightarrow (\text{O})$

18. $x + \frac{1}{x} = 1$ 일때, $x^5 + \frac{1}{x^5}$ 의 값은?

- ① 1 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 7

해설

$$\begin{aligned}x^2 + \frac{1}{x^2} &= \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = 1 - 2 = -1 \\x^3 + \frac{1}{x^3} &= \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) = 1 - 3 = -2 \\ \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) &= x^5 + \frac{1}{x^5} + x + \frac{1}{x} \\ (-1) \times (-2) &= x^5 + \frac{1}{x^5} + 1 \\ \therefore x^5 + \frac{1}{x^5} &= 1\end{aligned}$$

해설

$$\begin{aligned}x + \frac{1}{x} = 1 \text{ 의 양변에 } x \text{ 를 곱하면} \\ x^2 - x + 1 = 0, (x + 1)(x^2 - x + 1) = 0, \\ x^3 + 1 = 0, x^3 = -1, \frac{1}{x^3} = -1 \\ x^5 + \frac{1}{x^5} = -x^2 - \frac{1}{x^2} = -\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) \\ = -(-1) = 1\end{aligned}$$

19. 삼각형의 세 변의 길이 a, b, c 가 $b^3 - ac^2 + a^2b + ab^2 + a^3 - bc^2 = 0$ 인 관계를 만족할 때, 이 삼각형의 모양은?
- ① 정삼각형

② 직각삼각형

③ 이등변삼각형

④ 둔각삼각형

⑤ 직각이등변삼각형

해설

차수가 가장 낮은 c 에 대한 내림차순으로 정리한 뒤 인수분해한다.

$-(a+b)c^2 + a^3 + a^2b + b^3 + ab^2 = 0$

$-(a+b)c^2 + a^2(a+b) + b^2(a+b) = 0$

$-(a+b)(c^2 - a^2 - b^2) = 0$

$(a+b \neq 0)$

$c^2 - a^2 - b^2 = 0$

$\therefore c^2 = a^2 + b^2$

$\therefore C = 90^\circ$ 인 직각삼각형

20. $a_1, a_2, \dots, a_{10}$ 은 1 또는 -1 의 값을 갖고 $a_1 a_2 \dots a_{10} = 1$ 일 때, $\sqrt{a_1} \sqrt{a_2} \dots \sqrt{a_{10}}$ 의 값이 될 수 있는 수를 다음 <보기>에서 모두 고르면? (단, $i = \sqrt{-1}$)

보기

㉠ 1 ㉡ -1 ㉢ i ㉣ $-i$

- ① ㉠ ② ㉠, ㉡ ③ ㉡, ㉣
 ④ ㉠, ㉡, ㉣ ⑤ ㉠, ㉡, ㉣, ㉣

해설

$a_1 a_2 \dots a_{10} = 1$ 이면 $a_1, a_2, \dots, a_{10}$ 중에서 -1 이 되는 수는 짝수(0 포함)개 있다.
 i) -1 이 $4k + 2(k = 0, 1, 2)$ 개 있을 때

$$\frac{\sqrt{a_1} \sqrt{a_2} \dots \sqrt{a_{10}}}{\sqrt{a_1 a_2 \dots a_{10} i^{4k+2}}} = \sqrt{1} \cdot i^2 = -1$$

 ii) -1 이 $4k(k = 0, 1, 2)$ 개 있을 때

$$\frac{\sqrt{a_1} \sqrt{a_2} \dots \sqrt{a_{10}}}{\sqrt{a_1 a_2 \dots a_{10} i^{4k}}} = 1$$

 i), ii)에서 ㉠, ㉡ 만이 옳다.

21. 실수 x, y 가 방정식 $x^2 + 2xy + 2y^2 + y - 6 = 0$ 을 만족할 때, y 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

x 에 대한 이차방정식 $x^2 + 2yx + 2y^2 + y - 6 = 0$ 이 실근을 가지므로 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4} = y^2 - (2y^2 + y - 6) \geq 0$$

$$y^2 + y - 6 \leq 0, \quad (y + 3)(y - 2) \leq 0$$

$\therefore -3 \leq y \leq 2$ 따라서, y 의 최댓값은 2 이다.

22. 한 권에 500 원 하는 공책과 800 원 하는 연습장을 합하여 13 권을 사는데 총 금액이 7500 원 이상 8000 원 미만이 되게하려면 500 원 하는 공책을 몇 권을 살 수 있는지 구하여라.

▶ 답 : 권

▷ 정답 : 9 권

해설

500 원 하는 공책은 x 권 , 800 원 하는 연습장은 $(13 - x)$ 권
 $7500 \leq 500x + 800(13 - x) < 8000$
 $7500 \leq 500x + 10400 - 800x < 8000$
 $7500 \leq -300x + 10400 < 8000$
 $-29 \leq -3x < -24$
 $8 < x \leq \frac{29}{3}$
그러므로 9권

23. 이차함수 $y = x^2 - 2(m+1)x + 4m$ 의 최솟값을 a 이라 할 때, a 의 최댓값은?

① 1 ② -1 ③ 2 ④ -2 ⑤ 0

해설

$$\begin{aligned} y &= x^2 - 2(m+1)x + 4m \\ &= \{x^2 - 2(m+1)x + (m+1)^2 - (m+1)^2\} + 4m \\ &= \{x - (m+1)\}^2 - (m+1)^2 + 4m \\ \therefore \text{최솟값 } M &= -(m+1)^2 + 4m \\ &= -m^2 + 2m - 1 \\ &= -(m^2 - 2m + 1) \\ &= -(m-1)^2 \end{aligned}$$

따라서 a 의 최댓값은 0 이다.

24. 실수 x, y, z 가 $x + y + z = 2$, $x^2 + y^2 + z^2 = 14$, $x^3 + y^3 + z^3 = 20$ 을 만족할 때, $x - 2y + z$ 의 값을 구하면? (단, $x < y < z$)

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$x + y + z = 2 \dots \textcircled{1}$
 $x^2 + y^2 + z^2 = 14 \dots \textcircled{2}$
 $x^3 + y^3 + z^3 = 20 \dots \textcircled{3}$
 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서
 $xy + yz + zx = -5 \dots \textcircled{4}$
 $x^3 + y^3 + z^3$
 $= (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) + 3xyz$
 $= 20$
 $\therefore xyz = -6 \dots \textcircled{5}$
 $\textcircled{1}, \textcircled{4}, \textcircled{5}$ 을 이용하여 x, y, z 를
세 근으로 하는 삼차방정식을 만들면
 $t^3 - 2t^2 - 5t + 6 = 0(t - 1)(t + 2)(t - 3) = 0$
 $t = 1, -2, 3$
 $x < y < z$ 이므로 $x = -2, y = 1, z = 3$
 $\therefore x - 2y + z = -1$

25. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 - 2xy + 4yz - 4z^2 = 1 \\ x + y + z = 6 \end{cases}$ 의 정수해 x, y, z 의 곱 xyz

를 구하면?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 6 ⑤ 36

해설

$$(x - y)^2 - (y - 2z)^2 = 1$$

$$\therefore (x - 2y + 2z)(x - 2z) = 1$$

x, y, z 가 정수이므로

$$\begin{cases} x - 2y + 2z = 1 \\ x - 2z = 1 \end{cases}, \begin{cases} x - 2y + 2z = -1 \\ x - 2z = -1 \end{cases}$$

$x = 6 - y - z$ 를 대입하면

$$\begin{cases} 3y - z = 5 \\ y + 3z = 5 \end{cases} \quad \cdots (i),$$

$$\begin{cases} 3y - z = 7 \\ y + 3z = 7 \end{cases} \quad \cdots (ii)$$

(i)에서 $x = 3, y = 2, z = 1$

(ii)는 만족하는 정수 근이 없다.

$$\therefore xyz = 6$$