1. $(x^3+ax+2)(x^2+bx+2)$를 전개했을 때, x^2과 x^3의 계수를 모두 0이 되게 하는 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① -2　　② -1　　③ 1　　④ 2　　⑤ $\frac{3}{2}$

해설

$(x^3+ax+2)(x^2+bx+2)$
$= x^5+bx^4+(a+2)x^3+(ab+2)x^2+(2a+2b)x+4$
(x^2의 계수)=(x^3의 계수)=0이므로
$ab+2=0,\ a+2=0$
따라서 $a=-2,\ b=1$
$\therefore a+b=-1$

2. 등식 $2x^2-3x-2=a(x-1)(x-2)+bx(x-2)+cx(x-1)$가 x값에 관계없이 항상 성립할 때, 상수 $a+b+c$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

양변에 $x=0$을 대입하면

$-2=2a \quad \therefore \ a=-1$

양변에 $x=1$을 대입하면

$-3=-b \quad \therefore \ b=3$

양변에 $x=2$를 대입하면

$0=2c \quad \therefore c=0$

$\therefore \ a+b+c=2$

3. $(1+ai)^2 = 2i$ (a 는 실수)라 할 때 $(1+ai)(1-ai)$ 의 값을 구하시오.
(단, $i = \sqrt{-1}$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$(1+ai)^2 = 2i$ 에서 $(1-a^2) + 2ai = 2i$
복소수의 상등에서 $1-a^2 = 0,\ 2a = 2$
$\therefore\ a = 1$

$$\begin{aligned} \therefore\ (1+ai)(1-ai) &= (1+i)(1-i) \\ &= 1-(-1) \\ &= 2 \end{aligned}$$

4. 이차방정식 $x^2+(m+1)x+m+4=0$이 중근을 가질 때, 모든 실수 m의 값의 합을 구하면?

① -3 ② 0 ③ 2 ④ 3 ⑤ 5

해설

중근을 가지므로, 판별식 $D=0$

$D=(m+1)^2-4\cdot 1\cdot (m+4)=m^2-2m-15=0$

$(m-5)(m+3)=0 \quad \therefore \ m=-3,\ 5$

$\therefore\ m$의 값의 합은 $-3+5=2$

5. 이차방정식 $x^2+2x+k-3=0$이 서로 다른 두 실근을 가질 때, 정수 k의 최대값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

서로 다른 두 실근을 갖으려면 판별식이 0보다 커야 한다.

$D' = 1^2-(k-3)>0$

$\therefore\ k<4$

$\therefore$ 최댓값은 3 ($\because\ k$는 정수)

6. 연속하는 세 자연수의 합이 10 이상 20 미만이고, 큰 수의 3 배는 작은 두 수의 합보다 10 이상 클 때, 세 수 중 가장 큰 수는?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

연속하는 세 자연수를 $x-1,\ x,\ x+1$ 이라고 하면

$$\begin{cases} 10 \le (x-1)+x+(x+1) < 20 & \cdots ㉠ \\ (x-1)+x \le 3(x+1)-10 & \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠ 에서 $10 \le 3x < 20$, $\therefore\ \dfrac{10}{3} \le x < \dfrac{20}{3}$

㉡ 에서 $2x-1 \le 3x-7$, $-x \le -6$ $\therefore\ x \ge 6$

$6 \le x < \dfrac{20}{3}$ 이므로 이를 만족하는 자연수는 6 이고, 세 자연수는 5, 6, 7 이다.

따라서, 세 수 중 가장 큰 수는 7 이다.

7. 모든 실수 x에 대하여 부등식 $(m+2)x^2-2(m+2)x+4>0$이 항상 성립하도록 할 때, 상수 m의 값의 범위에 속한 정수의 개수는?

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

모든 실수 x에 대하여 성립하기 위해서는

$m \geq -2$

$D/4=(m+2)^2-4(m+2)<0$이므로

$m^2+4m+4-4m-8=m^2-4<0$

따라서 $-2 \leq m < 2$이므로

만족하는 정수 m의 개수는

$-2,\ -1,\ 0,\ 1$의 4개

8. $\begin{cases} x^2-3x \le 0 \\ x^2-5x+4<0 \end{cases}$ 을 만족하는 x 의 범위의 해가 $\alpha < x \le \beta$일 때, $\alpha+\beta$ 의 값은?

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$x^2-3x \le 0$에서

$x(x-3) \le 0$이므로

$0 \le x \le 3 \cdots$ ㈎

$x^2-5x+4<0$에서

$(x-1)(x-4)<0$이므로

$1<x<4 \cdots$ ㈏

㈎, ㈏에 의해

$1<x \le 3$이므로

$\alpha=1, \beta=3$

$\therefore \alpha+\beta=4$

9. 다항식 x^3+ax^2+bx+c 를 $x+2$로 나누면 3이 남고, x^2-1로 나누면 떨어진다. 이 때, abc의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$$x^3+ax^2+bx+c=(x+2)Q_{1(}x)+3$$
$$=(x+1)(x-1)Q_{2(}x)$$

$f(-2)=3 \quad f(1)=0 \quad f(-1)=0$

$x=-2$ 대입, $-8+4a-2b+c=3$

$x=-1$ 대입, $-1+a-b+c=0$

$x=1$ 대입, $1+a+b+c=0$

세 식을 연립해서 구하면

$a=3, b=-1, c=-3$

$\therefore \ abc=9$

10. 사차식 $x^4-10x^2y^2+9y^4$ 의 인수가 아닌 것은?

① $x-3y$ ② $x-2y$ ③ $x-y$

④ $x+y$ ⑤ $x+3y$

해설

$$x^4-10x^2y^2+9y^4=\left(x^2-9y^2\right)\left(x^2-y^2\right)$$
$$=(x-3y)(x+3y)(x-y)(x+y)$$

11. 자연수 $N = 35^3 + 3 \cdot 35^2 + 3 \cdot 35 + 1$ 의 양의 약수의 개수를 구하여라.(인수분해공식을 이용하여 푸시오.)

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 49 개

해설

$a^3 + 3a^2 + 3a + 1 = (a+1)^3$

$\therefore \; N = 35^3 + 3 \cdot 35^2 + 3 \cdot 35 + 1$

$= (35+1)^3 = 36^3 = 2^6 \times 3^6$

$\therefore$ 약수의 개수 $= (6+1) \times (6+1) = 49$

12. $a+b+c=4$, $ab+bc+ca=3$, $abc=1$일 때, $a^3+b^3+c^3$의 값을 구하면?

① 30　② 31　③ 32　④ 33　⑤ 34

해설

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

위 식에 따라 $a^2+b^2+c^2+6=16$

$\therefore\ a^2+b^2+c^2=10$

$a^3+b^3+c^3$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$

$=4\times(10-3)+3\times 1$

$=31$

13. 이차방정식 $x^2-3x+1=0$의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 할 때, $\alpha+\frac{1}{\beta},\ \beta+\frac{1}{\alpha}$을 두 근으로 하고 이차항의 계수가 1인 이차방정식을 구하면?

① $x^2-6x+4=0$ ② $x^2-3x+4=0$

③ $x^2+6x+5=0$ ④ $x^2+4x+5=0$

⑤ $x^2-4x+5=0$

해설

$x^2-3x+1=0$의 두 근이 α, β이므로 $\alpha+\beta=3,\ \alpha\beta=1$

두 근의 합 : $\left(\alpha+\frac{1}{\beta}\right)+\left(\beta+\frac{1}{\alpha}\right)$

$=\alpha+\beta+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=3+\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=3+3=6$

두 근의 곱 : $\left(\alpha+\frac{1}{\beta}\right)\left(\beta+\frac{1}{\alpha}\right)$

$=\alpha\beta+1+1+\frac{1}{\alpha\beta}=\alpha\beta+\frac{1}{\alpha\beta}+2=4$

$\therefore$ 방정식은 $x^2-6x+4=0$

14. 유리수 a, b에 대하여 곡선 $y = x^2 - a$와 $y = bx$가 두 점 P, Q에서 만난다. 점 P의 x좌표가 $\sqrt{5}+1$일 때, $a+b$의 값을 구하면?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

두 곡선 $y = x^2 - a$와 $y = bx$의 교점의 x좌표는
$x^2 - bx - a = 0$의 두 근이다.
$\sqrt{5}+1$이 근이므로, $-\sqrt{5}+1$도 근이다.
근과 계수의 관계에 의해
$b = \sqrt{5}+1 - \sqrt{5}+1 = 2$
$-a = (\sqrt{5}+1)(-\sqrt{5}+1) = -4$
$\therefore\ a = 4 \qquad \therefore a+b = 6$

15. 이차함수 $y=\frac{1}{2}x^2-2x+m+10$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1 만큼 , y 축의 방향으로 3 만큼 평행이동하였더니 최솟값이 5 가 되었다. 이때, 상수 m 의 값을 구하면?

① -16　　② -10　　③ -6　　④ 2　　⑤ 8

해설

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2}x^2-2x+m+10 \\ &= \frac{1}{2}(x^2-4x+4-4)+m+10 \\ &= \frac{1}{2}(x-2)^2+8+m \end{aligned}$$

x 축의 방향으로 1 만큼 , y 축의 방향으로 3 만큼 평행이동한 식은

$$y=\frac{1}{2}(x-2-1)^2+8+m+3=\frac{1}{2}(x-3)^2+11+m$$

최솟값이 5 이므로 $11+m=5$ 에서 $m=-6$ 이다.

16. 가로의 길이와 세로의 길이의 합이 12 인 직사각형의 넓이를 y라고 할 때, y의 최댓값을 구하면?

① 36 ② 16 ③ 12 ④ 10 ⑤ 8

해설

가로의 길이를 x 라고 두면 세로의 길이는 $12 - x$ 이다.

$$\begin{aligned} y &= x \times (12 - x) \\ &= -x^2 + 12x \\ &= -(x^2 - 12x + 36) + 36 \\ &= -(x - 6)^2 + 36 \end{aligned}$$

따라서 36 이 최댓값이다.

17. $x^3-1=0$의 한 허근을 ω라 할 때, 다음 중 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, $\overline{\omega}$는 ω의 켤레복소수이다.)

㉠ $\omega^6=1$	㉡ $\omega^2=\overline{\omega}$
㉢ $\omega+\overline{\omega}=-1$	㉣ $\omega^2+\omega=-1$

① ㉠, ㉡　② ㉠, ㉢　③ ㉠, ㉢, ㉣

④ ㉡, ㉢, ㉣　⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉣

해설

$x^3-1=0$의 한 허근이 ω이므로,

$\omega^3=1,\ (x-1)(x^2+x+1)=0$

$\omega^2+\omega+1=0$ 켤레근 $\overline{\omega}$일 경우도

$\overline{\omega}^3=1,\ \overline{\omega}^2+\overline{\omega}+1=0$

㉠ $\omega^3=1,\ (\omega^3)^2=1\rightarrow$(○)

㉢ $\omega+\overline{\omega}=-1,$

$\overline{\omega}=-1-\omega=-(\omega+1)$

$\omega^2+\omega+1$을 이용.

$\omega+1=-\omega^2$ 이므로 $\overline{\omega}=\omega^2\rightarrow$(○)

㉡ 두 근 $\omega, \overline{\omega}$의 합은

$x^2+x+1=0$의 두 근의 합이므로

$\omega+\overline{\omega}=-1$

㉣ $\omega^2+\omega+1=0,$

$\omega^2+\omega=-1\rightarrow$(○)

18. $x+\dfrac{1}{x}=1$ 일때, $x^5+\dfrac{1}{x^5}$ 의 값은?

① 1　　② 3　　③ 4　　④ 5　　⑤ 7

해설

$$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=1-2=-1$$

$$x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{1}\right)=1-3=-2$$

$$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)=x^5+\frac{1}{x^5}+x+\frac{1}{x}$$

$$(-1)\times(-2)=x^5+\frac{1}{x^5}+1$$

$$\therefore\ x^5+\frac{1}{x^5}=1$$

해설

$x+\dfrac{1}{x}=1$ 의 양변에 x를 곱하면

$x^2-x+1=0,\ (x+1)(x^2-x+1)=0,$

$x^3+1=0,\ x^3=-1,\ \dfrac{1}{x^3}=-1$

$$x^5+\frac{1}{x^5}=-x^2-\frac{1}{x^2}=-\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)$$
$$=-(-1)=1$$

19. 삼각형의 세 변의 길이 $a,\ b,\ c$가 $b^3 - ac^2 + a^2b + ab^2 + a^3 - bc^2 = 0$인 관계를 만족할 때, 이 삼각형의 모양은?

① 정삼각형 ② 직각삼각형

③ 이등변삼각형 ④ 둔각삼각형

⑤ 직각이등변삼각형

해설

차수가 가장 낮은 c에 대한 내림차순으로 정리한 뒤 인수분해한다.

$-(a+b)c^2 + a^3 + a^2b + b^3 + ab^2 = 0$

$-(a+b)c^2 + a^2(a+b) + b^2(a+b) = 0$

$-(a+b)(c^2 - a^2 - b^2) = 0$

$(a+b \neq 0)$

$c^2 - a^2 - b^2 = 0$

$\therefore c^2 = a^2 + b^2$

$\therefore\ C = 90°$인 직각삼각형

20. $a_1,\ a_2,\ \cdots a_{10}$ 은 1 또는 -1 의 값을 갖고 $a_1 a_2 \cdots\cdots a_{10} = 1$ 일 때, $\sqrt{a_1}\sqrt{a_2}\cdots\cdots\sqrt{a_{10}}$ 의 값이 될 수 있는 수를 다음 <보기> 에서 모두 고르면? (단, $i = \sqrt{-1}$)

보기

㉠ 1	㉡ -1	㉢ i	㉣ $-i$

① ㉠　　② ㉠, ㉡　　③ ㉡, ㉢

④ ㉠, ㉡, ㉢　　⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉣

해설

$a_1 a_2 \cdots\cdots a_{10} = 1$ 이면 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{10}$ 중에서 -1 이 되는 수는 짝수(0 포함) 개 있다.

i) -1 이 $4k+2(k=0,\ 1,\ 2)$ 개 있을 때

$$\sqrt{a_1}\sqrt{a_2}\cdots\cdots\sqrt{a_{10}}$$
$$= \sqrt{a_1 a_2 \cdots a_{10}}\ i^{4k+2} = \sqrt{1}\cdot i^2 = -1$$

ii) -1 이 $4k(k=0,\ 1,\ 2)$ 개 있을 때

$$\sqrt{a_1}\sqrt{a_2}\cdots\cdots\sqrt{a_{10}}$$
$$= \sqrt{a_1 a_2 \cdots a_{10}}\ i^{4k}$$
$$= 1$$

i), ii) 에서 ㉠, ㉡ 만이 옳다.

21. 실수 x, y 가 방정식 $x^2 + 2xy + 2y^2 + y - 6 = 0$ 을 만족할 때, y 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

x 에 대한 이차방정식 $x^2 + 2yx + 2y^2 + y - 6 = 0$ 이 실근을 가지므로 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4} = y^2 - \left(2y^2 + y - 6\right) \geq 0$$

$y^2 + y - 6 \leq 0$, $\left(y + 3\right)\left(y - 2\right) \leq 0$

$\therefore -3 \leq y \leq 2$ 따라서, y 의 최댓값은 2 이다.

22. 한 권에 500 원 하는 공책과 800 원 하는 연습장을 합하여 13 권을 사는데 총 금액이 7500 원 이상 8000 원 미만이 되게하려면 500 원 하는 공책을 몇 권을 살 수 있는지 구하여라.

▶ 답 : ______ 권

▷ 정답 : 9 권

해설

500 원 하는 공책은 x 권 , 800 원 하는 연습장은 $(13 - x)$ 권

$7500 \le 500x + 800(13 - x) < 8000$

$7500 \le 500x + 10400 - 800x < 8000$

$7500 \le -300x + 10400 < 8000$

$-29 \le -3x < -24$

$8 < x \le \frac{29}{3}$

그러므로 9권

23. 이차함수 $y = x^2 - 2(m+1)x + 4m$ 의 최솟값을 a 이라 할 때, a 의 최댓값은?

① 1 ② -1 ③ 2 ④ -2 ⑤ 0

해설

$$\begin{aligned} y &= x^2 - 2(m+1)x + 4m \\ &= \left\{x^2 - 2(m+1)x + (m+1)^2 - (m+1)^2\right\} + 4m \\ &= \left\{x - (m+1)\right\}^2 - (m+1)^2 + 4m \end{aligned}$$

$\therefore$ 최솟값 $M = -(m+1)^2 + 4m$

$$\begin{aligned} &= -m^2 + 2m - 1 \\ &= -(m^2 - 2m + 1) \\ &= -(m-1)^2 \end{aligned}$$

따라서 a 의 최댓값은 0 이다.

24. 실수 x, y, z가 $x+y+z=2,\ x^2+y^2+z^2=14,\ x^3+y^3+z^3=20$을 만족할 때, $x-2y+z$의 값을 구하면? (단, $x<y<z$)

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$x+y+z=2\ldots$ ㉠

$x^2+y^2+z^2=14\ldots$ ㉡

$x^3+y^3+z^3=20\ldots$ ㉢

㉠, ㉡에서

$xy+yz+zx=-5\ldots$ ㉣

$x^3+y^3+z^3$

$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)+3xyz$

$=20$

$\therefore\ xyz=-6\ldots$ ㉤

㉠, ㉣, ㉤을 이용하여 $x,\ y,\ z$를

세 근으로 하는 삼차방정식을 만들면

$t^3-2t^2-5t+6=0(t-1)(t+2)(t-3)=0$

$t=1,\ -2,\ 3$

$x<y<z$이므로 $x=-2\ y=1\ z=3$

$\therefore\ \ x-2y+z=-1$

25. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 - 2xy + 4yz - 4z^2 = 1 \\ x + y + z = 6 \end{cases}$ 의 정수해 x, y, z의 곱 xyz를 구하면?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 6　　⑤ 36

해설

$(x-y)^2 - (y-2z)^2 = 1$

$\therefore\ (x-2y+2z)(x-2z) = 1$

x, y, z가 정수이므로

$\begin{cases} x-2y+2z=1 \\ x-2z=1 \end{cases}$, $\begin{cases} x-2y+2z=-1 \\ x-2z=-1 \end{cases}$

$x = 6-y-z$를 대입하면

$\begin{cases} 3y-z=5 \\ y+3z=5 \end{cases} \cdots \text{(i)},$

$\begin{cases} 3y-z=7 \\ y+3z=7 \end{cases} \cdots \text{(ii)}$

(i)에서 $x=3,\ y=2,\ z=1$

(ii)는 만족하는 정수 근이 없다.

$\therefore\ xyz = 6$