1. 등식 $3x^2+5x=a(x-1)^2+b(x+1)+c$가 x에 관한 항등식이 되도록 하는 상수 a, b, c에 대하여 $a+b-c$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 28

해설

우변을 전개하여 계수비교법으로 미정계수를 구한다.

$3x^2+5x=a(x-1)^2+b(x+1)+c$

$\quad\quad =ax^2+(-2a+b)x+a+b+c$

$a=3$, $-2a+b=5$, $a+b+c=0$

$\therefore$ $a=3$, $b=11$, $c=-14$

$\therefore$ $a+b-c=28$

해설

수치대입법으로 미정계수를 구해도 된다.

양변에 $x=0$을 대입하면

$0=a+b+c\cdots$ ㉠

양변에 $x=1$을 대입하면

$8=2b+c\cdots$ ㉡

양변에 $x=-1$을 대입하면

$-2=4a+c\cdots$ ㉢

㉠, ㉡, ㉢을 연립하면

$a=3$, $b=11$, $c=-14$

$\therefore$ $a+b-c=28$

2. $(\sqrt{3}-i)^2 \times (\sqrt{12}+2i)^2$ 을 간단히 하면? (단, $i=\sqrt{-1}$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 64

해설

$$
\begin{aligned}
(\text{준 식}) &= (\sqrt{3}-i)^2 \times (2\sqrt{3}+2i)^2 \\
&= 2^2 \times \left\{(\sqrt{3}-i)(\sqrt{3}+i)\right\}^2 \\
&= 2^2 \times 4^2 = 2^2 \times 2^4 = 2^6 \\
&= 64
\end{aligned}
$$

3. 복소수에 대한 다음 설명 중 옳은 것을 <u>모두</u> 찾으면?

① $2+i$의 허수 부분은 $2i$ 이다.

② $-5i$는 순허수이다.

③ i^3 은 허수이다.

④ $1+\sqrt{3}i$의 켤레복소수는 $1-\sqrt{3}i$이다.

⑤ $1-\dfrac{1}{i}$는 실수이다.

해설

① $2+i$ 의 허수부분 : i (×)
② $-5i$ 는 순허수 (○)
③ $i^3=-i$ 허수(○)
④ $\overline{1+\sqrt{3}i}=1-\sqrt{3}i$ (○)
⑤ $1-\dfrac{1}{i}=1+i$ 복소수 (×)

4. $x^2 - 5x + 6 = 0$의 근을 근의 공식을 이용하여 구하여라.

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: $x = 2$

▷ 정답: $x = 3$

해설

$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \times 1 \times 6}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2}$

$\therefore x = 2$ 또는 $x = 3$

5. x에 대한 이차방정식 $x^2+(a-1)x+\frac{1}{4}a^2+a-2=0$이 서로 다른 두 실근을 가질 실수 a의 조건을 구하면?

① $a>1$ ② $a<\frac{3}{2}$ ③ $a<\frac{3}{4}$ ④ $a>\frac{3}{4}$ ⑤ $a<2$

해설

판별식을 D라고 하면,

$D=(a-1)^2-4\left(\frac{1}{4}a^2+a-2\right)=-6a+9$

서로 다른 두 실근을 가지려면 $D>0$이어야 하므로

$-6a+9>0$에서 $a<\frac{3}{2}$

6. 이차방정식 $x^2-x(kx-5)+3=0$이 허근을 가질 때, 정수 k의 최댓값을 구하면?

① -3　② -2　③ -1　④ 0　⑤ 1

해설

$x^2-kx^2+5x+3=0$이 허근은 가지려면

$D=25-4\times3(1-k)<0$

$25-12+12k<0\quad\therefore 12k<-13$

$\therefore k<-\dfrac{13}{12}$이므로

정수 k의 최댓값은 -2

7. 다음 중 연립부등식 $\begin{cases} 5x+3<18 \\ -3x+2<0 \end{cases}$ 의 해가 <u>아닌</u> 것은?

① 1 ② $\frac{6}{5}$ ③ $\frac{4}{3}$ ④ 2 ⑤ 3

해설

$\begin{cases} 5x+3<18 \\ -3x+2<0 \end{cases}$ 을 풀면 $\begin{cases} x<3 \\ x>\frac{3}{2} \end{cases}$ 이므로

$\frac{2}{3}<x<3$

8. 부등식 $|x-2|+|x+3| \geq -2x+9$의 해는?

① $x \geq 2$ ② $-3 \leq x \leq 2$ ③ $1 < x \leq 2$
④ $x < 2$ ⑤ 해가 없다.

해설

(i) $x < -3$일 때,
$-2x-1 \geq -2x+9$, $-1 \geq 9$
따라서 이 범위에서 해가 존재하지 않는다.
(ii) $-3 \leq x < 2$일 때,
$5 \geq -2x+9$
$2x \geq 4$, $x \geq 2$ 따라서 이 범위에서 해가 없다.
(iii) $x \geq 2$일 때,
$2x+1 \geq -2x+9$
$4x \geq 8$, $x \geq 2$ 따라서 이 범위에서의 해는 $x \geq 2$이다.
세 범위의 해를 연립하면 결과는
$\therefore x \geq 2$

9. 다항식 $2x^3 + x^2 + 3x$를 $x^2 + 1$로 나눈 나머지는?

① $x - 1$ ② x ③ 1
④ $x + 3$ ⑤ $3x - 1$

해설

직접 나누어보면

$(2x + 1) + \dfrac{x - 1}{x^2 + 1}$

몫 : $2x + 1$, 나머지 : $x - 1$

10. $(2x^3-3x^2+3x+4)(3x^4+2x^3-2x^2-7x+8)$을 전개한 식에서 x^3의 계수는?

① 31 ② 33 ③ 35 ④ 37 ⑤ 39

해설

$2x^3\times8-3x^2\times(-7x)+3x\times(-2x^2)+4\times2x^3=39x^3$

11. x에 대한 항등식 $x^2-2x+3=a+b(x-1)+cx(x-1)$에서 a, b, c의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a=2$

▷ 정답 : $b=-1$

▷ 정답 : $c=1$

해설

계수비교법에 의하여

$x^2-2x+3=a+b(x-1)+cx(x-1)$

$\qquad\qquad\quad =cx^2+(b-c)x+a-b$

$x^2-2x+3=cx^2+(b-c)x+a-b$에서

$c=1,\ b-c=-2,\ a-b=3$

연립하여 풀면

$\therefore\ a=2,\ b=-1,\ c=1$

12. 다음 중 다항식 $a^3 - a^2b + ab^2 + ac^2 - b^3 - bc^2$ 의 인수인 것은?

① $a + c$ ② $a - b^2$ ③ $a^2 - b^2 + c^2$

④ $a^2 + b^2 + c^2$ ⑤ $a^2 + b^2 - c^2$

해설

$a^3 - a^2b + ab^2 + ac^2 - b^3 - bc^2$
$= a^3 - b^3 + (a-b)c^2 - ab(a-b)$
$= (a-b)(a^2 + ab + b^2) + (a-b)c^2 - ab(a-b)$
$= (a-b)(a^2 + ab + b^2 + c^2 - ab)$
$= (a-b)(a^2 + b^2 + c^2)$

13. 두 다항식 $x^2 + ax + b$, $x^2 + 3bx + 2a$의 최대공약수가 $x - 1$일 때, $a + b$의 값을 구하면?

① 2　　② 1　　③ 0　　④ -1　　⑤ -2

해설

최대공약수가 $x - 1$이므로
$x^2 + ax + b$와 $x^2 + 3bx + 2a$는
모두 $x - 1$로 나누어 떨어져야 한다.
$\therefore\ 1 + a + b = 0$이고 $1 + 3b + 2a = 0$
따라서, $a = -2,\ b = 1$
$\therefore\ a + b = -1$

14. 이차함수 $y = -3x^2 - 6x + k$ 의 최댓값이 $\frac{5}{2}$일 때, 상수 k의 값을 구하면?

① $-\frac{1}{2}$ ② 0 ③ $\frac{1}{2}$ ④ 1 ⑤ $\frac{3}{2}$

해설

$y = -3x^2 - 6x + k = -3(x^2 + 2x + 1) + k + 3 = -3(x+1)^2 + k + 3$
이므로 꼭짓점의 좌표는 $(-1, k+3)$ 이다.
주어진 함수는 위로 볼록한 함수이므로 꼭짓점의 y 의 값이 최댓값이 된다.
$\therefore\ k + 3 = \frac{5}{2}$ $\therefore\ k = -\frac{1}{2}$

15. x에 대한 삼차방정식 $x^3+3x^2-kx-5=0$의 한 근이 -1일 때, 상수 k의 값은?

① -5 ② -3 ③ -1 ④ 1 ⑤ 3

해설

$x^3+3x^2-kx-5=0$의 한 근이 -1이므로 $x=-1$을 대입하면

$(-1)^3+3(-1)^2-k(-1)-5=0$

$\therefore\ k=3$

16. 모든 실수 x 에 대하여 $x^2+2(a-5)x+2(3a-19)$ 가 양이 되기 위한 a 값의 범위는?

① $a<7$ ② $a>9$ ③ $6<a\le 9$
④ $6\le a<9$ ⑤ $7<a<9$

해설
$x^2+2(a-5)x+2(3a-19)>0$ 이므로
이 부등식의 $D<0$ 이다.
$D=(a-5)^2-2(3a-19)=a^2-16a+63<0$
$\therefore 7<a<9$

17. 이차부등식 $x^2 + 2x + a < 0$의 해가 $-4 < x < 2$일 때, a의 값을 구하여라.(단, a는 상수)

▶ 답:

▷ 정답: -8

해설

해가 $-4 < x < 2$ 이므로

$(x+4)(x-2) < 0$

$x^2 + 2x - 8 = x^2 + 2x + a$

$\therefore a = -8$

18. $a < 0,\ b < 0$ 일 때, 다음 등식 중에서 성립하지 <u>않는</u> 것은?

① $\sqrt{a^2b} = -a\sqrt{b}$ ② $\sqrt{a^3b} = -a\sqrt{ab}$

③ $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$ ④ $\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = \sqrt{\dfrac{b}{a}}$

⑤ $\sqrt{a^2b^2} = ab$

해설

$a = -\alpha,\ b = -\beta(\alpha > 0,\ \beta > 0)$ 로 놓으면

① $\sqrt{a^2b} = \sqrt{\alpha^2(-\beta)} = \alpha\sqrt{-\beta} = -a\sqrt{b}$

② $$\begin{aligned}\sqrt{a^3b} &= \sqrt{(\alpha)^3(-\beta)} \\ &= \alpha\sqrt{(-\alpha)(-\beta)} \\ &= -a\sqrt{ab}\end{aligned}$$

③ $$\begin{aligned}\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} &= \sqrt{-\alpha}\sqrt{-\beta} \\ &= \sqrt{\alpha}i\cdot\sqrt{\beta}i \\ &= \sqrt{\alpha\beta}i^2 \\ &= -\sqrt{\alpha\beta} \\ &= -\sqrt{ab}\end{aligned}$$

④ $$\begin{aligned}\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} &= \frac{\sqrt{-\beta}}{\sqrt{-\alpha}} \\ &= \frac{\sqrt{\beta}i}{\sqrt{\alpha}i} \\ &= \frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}} \\ &= \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \\ &= \sqrt{\frac{b}{a}}\end{aligned}$$

⑤ $\sqrt{a^2b^2} = \sqrt{(-\alpha)^2(-\beta)^2} = \alpha\beta = ab$

19. 이차방정식 $x^2-5x+p=0$의 두 근은 $3, \alpha$이고 $x^2-px+q=0$의 두 근은 α, β이다. 이 때 β의 값은?(단 p, q는 상수)

① 2　　② 3　　③ 4　　④ 5　　⑤ 6

해설

이차방정식 $x^2-5x+p=0$에서
근과 계수의 관계에 의해
두 근의 합 : $3+\alpha=5 \quad \therefore \ \alpha=2$
두 근의 곱 : $3\cdot\alpha=p=3\cdot 2=6$
이차방정식 $x^2-6x+q=0$의 두 근이 $2, \beta$이므로
$2+\beta=6 \quad \therefore \ \beta=4$

20. 이차방정식 $x^2+2x+3=0$의 두 근을 α, β라고 할 때, $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$를 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식을 구하면?

① $x^2+6x-1=0$ ② $x^2-6x-1=0$
③ $x^2+x-6=0$ ④ $x^2-x+6=0$
⑤ $x^2-x-6=0$

해설

근과 계수와의 관계에 의해
$\alpha+\beta=-2,\quad \alpha\beta=3$
$-2, 3$을 근으로 하는 이차방정식은
$(x+2)(x-3)=0$
$x^2-x-6=0$

21. 이차방정식 $x^2+x+4(k-2)=0$의 두 근이 모두 음수일 때, 실수 k의 값의 범위는?

① $-2<k\le -1$　② $-1<k\le \frac{33}{16}$　③ $2<k\le \frac{33}{16}$
④ $k\le \frac{16}{33}$　⑤ $k<\frac{21}{16}$

해설

두 근을 α, β라고 할 때,
모두 음수일 조건은
$\alpha+\beta<0,\ \alpha\beta>0,\ D\ge 0$
(i) $\alpha+\beta=-1<0$
(ii) $\alpha\beta=4(k-2)>0 \quad \therefore k>2$
(iii) $D=1^2-4\cdot 4(k-2)=33-16k\ge 0$
$\therefore k\le \frac{33}{16}$
(ii)과 (iii)의 공통 범위는 $2<k\le \frac{33}{16}$

22. 부등식 $x^2-4|x|-5<0$을 풀면?

① $-5<x<5$ ② $-5<x<0$ ③ $-5<x<1$
④ $-1<x<5$ ⑤ $-1<x<6$

해설

(ⅰ) $x \geq 0$일 때, $|x|=x$이므로
$x^2-4x-5<0$, $(x-5)(x+1)<0$
$-1<x<5$
이 때 $x \geq 0$과의 공통범위는 $0 \leq x<5$
(ⅱ) $x<0$일 때
$x^2+4x-5<0$, $(x+5)(x-1)<0$
$-5<x<1$
이 때 $x<0$과 공통 범위는 $-5<x<0$
(ⅰ), (ⅱ)에서 $-5<x<5$

23. 다항식 $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+a$가 이차다항식의 완전제곱꼴이 되도록 a의 값을 정하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 16

해설

$(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+a$

$=(x+1)(x+7)(x+3)(x+5)+a$

$=(x^2+8x+7)(x^2+8x+15)+a$

$x^2+8x=A$로 놓으면

(준식) $=(A+7)(A+15)+a$

$=A^2+22A+105+a$

$=(A+11)^2-16+a$

따라서, $a=16$일 때 이차식 $x^2+8x+11$의 완전제곱식이 된다.

24. 이차함수 $y = ax^2+bx+c$ 의 최댓값이 9 이고 이차방정식 $ax^2+bx+c = 0$ 의 두 근이 $-2,\ 4$ 일 때, abc 의 값은? (단, $a,\ b,\ c$ 는 상수이다.)

① -10　② -12　③ -14　④ -16　⑤ -18

해설

$ax^2+bx+c=0$ 의 두 근이 $-2,\ 4$ 이므로

$$\begin{aligned} y &= ax^2+bx+c \\ &= a(x+2)(x-4) \\ &= a(x^2-2x-8) \\ &= a(x-1)^2-9a \end{aligned}$$

최댓값이 9 이므로 $-9a=9$

$\therefore a=-1$

따라서 구하는 이차함수는 $y=-x^2+2x+8$ 이고

$b=2,\ c=8$ 이다.

$\therefore abc=-1\times2\times8=-16$

25. 사차방정식 $x^4+x^3+2x^2+x+1=0$을 만족하는 모든 근의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$x^4+x^3+2x^2+x+1=0$의 양변을 x^2으로 나누면

$x^2+x+2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=0$

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(x+\frac{1}{x}\right)=0$

$x+\frac{1}{x}=t$로 치환하면

$t^2+t=0,\ t(t+1)=0$

$\therefore\ t=0$ 또는 $t=-1$

(ⅰ) $x+\frac{1}{x}=0$일 때, $x^2+1=0$

$\therefore x=\pm i$

(ⅱ) $x+\frac{1}{x}=-1$일 때,

$x^2+1=-x,\ x^2+x+1=0$

$\therefore\ x=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 주어진 방정식의 근은

$x=\pm i$ 또는 $x=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

$\therefore\ (-i)+i+\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}+\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}=-1$