1. $z = \dfrac{2}{1-i}$ 일 때, $2z^2 - 4z - 1$ 의 값을 구하면?

① -1 ② 2 ③ -3 ④ 4 ⑤ -5

해설

$z = \dfrac{2}{1-i} = 1+i$

$\therefore\ 2z^2 - 4z - 1 = 2(1+i)^2 - 4(1+i) - 1$
$= 4i - 4 - 4i - 1$
$= -5$

해설

$z = 1+i, z-1 = i$
양변을 제곱하고 정리하면
$z^2 - 2z = -2$
$2z^2 - 4z - 1$
$= 2(z^2 - 2z) - 1$
$= -4 - 1 = -5$

2. 복소수 $z = 1 - i$ 라고 할 때, $wz + 1 = \overline{w}$ 를 만족하는 복소수 w 의 실수부분을 구하면? (단, $\overline{w}$ 는 w 의 켤레복소수이다.)

① -2　　② -1　　③ 1　　④ $\frac{1}{2}$　　⑤ 2

해설

$w = a + bi$ 라 하면

$$\begin{aligned}(a+bi)(1-i)+1 &= a - ai + bi + b + 1 \\ &= (a+b+1) - (a-b)i \\ &= a - bi\end{aligned}$$ 에서

$a + b + 1 = a$, $\therefore$ $b + 1 = 0$ 이므로 $b = -1$

$a - b = b$ 이므로 $a + 1 = -1$ 에서 $a = -2$

따라서 w 의 실수부분은 -2

3. 다음 계산 과정에서 최초로 틀린 부분은?

$$
\begin{aligned}
\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{-2}} &= \boxed{㉠}\ \frac{\sqrt{8}\cdot\sqrt{-2}}{\sqrt{-2}\cdot\sqrt{-2}} \\
&= \boxed{㉡}\ \frac{\sqrt{-16}}{\sqrt{-2}\cdot\sqrt{-2}} \\
&= \boxed{㉢}\ \frac{\sqrt{-16}}{2} \\
&= \boxed{㉣}\ \frac{4i}{2} \\
&= \boxed{㉤} = \sqrt{-4}
\end{aligned}
$$

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉢

해설

$\sqrt{-2}\sqrt{-2} = \sqrt{2}i\sqrt{2}i = 2i^2 = -2$

따라서 최초로 틀린 부분은 ㉢이다.

4. 방정식 $|x|+|x-1|=2$의 해를 구하시오.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $-\frac{1}{2}$ 또는 -0.5

▷ 정답 : $\frac{3}{2}$ 또는 1.5

해설

i) $x<0$일 때,
$-x-(x-1)=2$이므로 $-2x+1=2$
$\therefore\ x=-\frac{1}{2}$
ii) $0\le x<1$일 때,
$x-(x-1)=2$이므로 $0\cdot x=1$
$\therefore$ 해가 없다.
iii) $1\le x$일 때,
$x+x-1=2$이므로 $2x=3$
$\therefore\ x=\frac{3}{2}$
(i), (ii), (iii)에서 $x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=\frac{3}{2}$

5. x에 대한 이차방정식 $kx^2+(2k+1)x+6=0$의 해가 $2,\ \alpha$일 때, $k+\alpha$의 값을 구하면?

① -1　② -2　③ -3　④ -4　⑤ -5

해설

해가 $2, \alpha$라면 방정식에 2를 대입하면 0이 된다.
$k \cdot 2^2 + (2k+1)2 + 6 = 0$
$4k + 4k + 8 = 0$에서 $k = -1$
$k = -1$을 방정식에 대입하고 α를 구한다.
$-x^2 - x + 6 = 0,\ x^2 + x - 6 = 0$
$(x+3)(x-2) = 0,\ x = 2, -3$
$\therefore k = -1,\ \alpha = -3$
$\therefore\ k + \alpha = -4$

6. x에 대한 이차방정식 $(k^2-1)x^2-2(k-1)x+1=0$이 허근을 가질 때, $k>m$이다. m의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$(k^2-1)x^2-2(k-1)x+1=0$이
허근을 가지려면
$\frac{D}{4}=(k-1)^2-(k^2-1)<0$
$(k^2-2k+1)-(k^2-1)<0$
$-2k+2<0,\ k>1$
$\therefore\ m=1$

7. 이차방정식 $x^2 + 2(k-a)x + k^2 + a^2 + b - 2 = 0$이 실수 k의 값에 관계없이 중근을 가질 때, $a + b$의 값을 구하라.

▶ 답:

▷ 정답: 2

해설

$\frac{D}{4} = (k-a)^2 - (k^2 + a^2 + b - 2) = 0$

$\therefore\ -2ka - b + 2 = 0$

이 식은 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로

k에 대한 항등식이다.

$a = 0,\ b = 2$

$\therefore\ a + b = 2$

8. $x^2 + ax + b = 0$ (a, b 는 실수) 의 한 근이 $1 + i$ 일 때, a 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

한 근이 $1 + i$ 이므로,
켤레근 $1 - i$ 도 식의 근.
$(1 + i) + (1 - i) = -a$
$\therefore\ a = -2$

9. 복소수 $z=(1+i)x+1-2i$ 에 대하여 z^2 이 음의 실수일 때, 실수 x 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $x=-1$

해설

$z = (1+i)x+1-2i = (x+1)+(x-2)i$

z^2 의 음의실수 $\Leftrightarrow$ z 가 순허수

$\therefore\ x+1=0,\ \ x=-1$

10. x 에 대한 방정식 $(a-2)(x-a)=0$의 풀이 과정에서 다음 중 옳은 것은?

① $a=0$일 때, $x=2$
② $a \neq 2$ 일 때, $x=a$
③ $a=2$일 때, 불능
④ $a=0$ 일 때, 부정
⑤ 해는 없다.

해설

$(a-2)(x-a)=0$
$\Rightarrow \quad a=2$ 또는 $x=a$
ⅰ) $a=2$ 일 때 : 부정
ⅱ) $a \neq 2$ 일 때 : $x=a$

11. 이차방정식 $(2-\sqrt{3})x^2-2(\sqrt{3}-1)x-6=0$의 두 근 중 큰 근에 가장 가까운 정수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

이차항의 계수를 유리수로 고치기 위해 방정식의 양변에 $2+\sqrt{3}$을 곱하면

$x^2-2(\sqrt{3}+1)x-(12+6\sqrt{3})=0$

근의 공식을 이용해 위 방정식을 풀면

$x=(\sqrt{3}+1)\pm\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2+12+6\sqrt{3}}$

$=(\sqrt{3}+1)\pm 2\sqrt{4+2\sqrt{3}}$

$=(\sqrt{3}+1)\pm 2(\sqrt{3}+1)$

$\therefore\ x=3\sqrt{3}+3$ 또는 $x=-\sqrt{3}-1$

큰 근은 $3\sqrt{3}+3$

그런데 $\sqrt{3}\fallingdotseq 1.7\cdots$ 이므로

가장 가까운 정수는 8이다.

12. 방정식 $x^2 - 2|x| - 3 = 0$의 근의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

i) $x \geq 0$일 때
$x^2 - 2x - 3 = 0$, $(x+1)(x-3) = 0$
$x = -1$ 또는 $x = 3$
그런데 $x \geq 0$이므로 $x = 3$
ii) $x < 0$일 때
$x^2 + 2x - 3 = 0$, $(x-1)(x+3) = 0$
$x = 1$ 또는 $x = -3$
그런데 $x < 0$이므로 $x = -3$
(i), (ii)에서 $x = 3$ 또는 $x = -3$
따라서 근의 합은 0이다.

13. $x^2-2x+3=0$의 두 근을 α, β라고 할 때, $(\alpha^2-2\alpha)(\beta^2-2\beta)$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 9

해설

$x^2-2x+3=0$ 에서 근과 계수의 관계에 의해

$\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=3$

$(\alpha^2-2\alpha)(\beta^2-2\beta)$

$=\alpha^2\beta^2-2\alpha^2\beta-2\alpha\beta^2+4\alpha\beta$

$=(\alpha\beta)^2-2\alpha\beta(\alpha+\beta)+4\alpha\beta$

$=9-6\cdot2+12=9$

14. x에 대한 이차방정식 $ax^2+2(a-1)x-(a+1)=0$은 어떤 근을 갖는지 판별하시오. (단, a는 실수)

① 중근　　② 한 실근과 한 허근
③ 서로 다른 두 실근　　④ 서로 같은 두 실근
⑤ 서로 다른 두 허근

해설

$ax^2+2(a-1)x-(a+1)=0$

$\frac{D}{4}=(a-1)^2+a(a+1)$

$=a^2-2a+1+a^2+a$

$=2a^2-a+1=2\left(a^2-\frac{1}{2}a\right)+1$

$=2\left(a^2-\frac{1}{2}a+\frac{1}{16}\right)+1-\frac{1}{8}$

$=2\left(a-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{7}{8}>0$

따라서 서로 다른 두 실근을 갖는다.

15. 이차방정식 $2x^2-4x-3k=0$이 허근을 갖고, 동시에 $x^2+5x-2k=0$이 실근을 갖도록 하는 정수 k의 개수를 구하면?

① 1개　② 2개　③ 3개　④ 4개　⑤ 5개

해설

$2x^2-4x-3k=0$이 허근을 가질 조건은

$\frac{D}{4}=4+6k<0$

$\therefore\ k<-\frac{2}{3}\quad\cdots\cdots$ ㉠

$x^2+5x-2k=0$이 실근을 가질 조건은

$D=25+8k\geq 0$

$\therefore\ k\geq -\frac{25}{8}\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $-\frac{25}{8}\leq k<-\frac{2}{3}$

따라서, 정수 $k=-3,\ -2,\ -1$

$\therefore$ 정수 k의 개수는 3개

16. 종섭이와 성제가 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ 을 각각 풀었다. 종섭이는 x 의 계수를 잘못 봐서 $3-2i,\ 3+2i$ 라는 근을 구했고, 성제는 상수항을 잘못 봐서 $2-i,\ 2+i$ 라는 근을 구했을 때, $\left|\frac{bc}{a^2}\right|$ 의 값은?

▶ 답 :

▷ 정답 : 52

해설

종섭이는 x의 계수를 잘못 보았으므로 상수항은 참이다.
두 근의 곱 $=\frac{c}{a}=(3-2i)(3+2i)=9+4=13$
성제는 상수항을 잘못 보았으므로 x의 계수는 참이다.
두 근의 합$=-\frac{b}{a}=2-i+2+i=4$
$\therefore \left|\frac{bc}{a^2}\right|=\left|\frac{b}{a}\times\frac{c}{a}\right|=|-4\times 13|=|-52|=52$

17. x에 대한 이차방정식 $x^2-(k-3)x+k+2=0$의 두 근이 모두 양수일 때 실수 k의 값의 범위는?

① $k \geq -5-2\sqrt{6}$ ② $k \geq -5+2\sqrt{6}$ ③ $k \geq -5+\sqrt{6}$
④ $k \geq 5+\sqrt{6}$ ⑤ $k \geq 5+2\sqrt{6}$

해설
$x^2-(k-3)x+k+2=0$에서
$D=(k-3)^2-4(k+2)$
$=k^2-6k+9-4k-8$
$=k^2-10k+1 \geq 0$
$\therefore k \leq 5-2\sqrt{6}$ 또는 $k \geq 5+2\sqrt{6}$
두 근의 합 $k-3>0$이므로 $k>3$
두 근의 곱 $k+2>0$이므로 $k>-2$
따라서 $k \geq 5+2\sqrt{6}$

18. 복소수 $z = a + bi$ (단, $a,\ b$는 실수, $i = \sqrt{-1}$를 좌표평면 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$에 대응시킬 때, $(2-3i)z$가 실수가 되게 하는 점 P가 그리는 도형은?

① 원
② 아래로 볼록한 포물선
③ 위로 볼록한 포물선
④ 기울기가 음인 직선
⑤ 기울기가 양인 직선

해설

$$(2-3i)z = (2-3i)(a+bi)$$
$$= (2a+3b) + (2b-3a)i$$

$\therefore\ 2b - 3a = 0 \quad \therefore\ b = \dfrac{3}{2}a \Rightarrow$ 기울기가 양인 직선

19. 복소수 $z=\dfrac{2}{1+i}$ 에 대하여 z^3-2z^2+2z+5 의 값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

$z=\dfrac{2}{1+i}=1-i$

$z^2=-2i,\ z^3=-2-2i$

$\therefore\ z^3-2z^2+2z+5$

$=(-2i-2)-2(-2i)+2(1-i)+5$

$=5$

해설

$$\begin{aligned} z=1-i \quad &\Rightarrow \quad z-1=-i \\ &\Rightarrow \quad z^2-2z+1=-1 \\ &\Rightarrow \quad z^2-2z+2=0 \end{aligned}$$

$z^3-2z^2+2z+5=z(z^2-2z+2)+5=5$

20. a, b, c가 삼각형의 세 변의 길이를 나타낼 때, $(a+b)x^2+2cx+a-b$는 x의 완전제곱식이다. 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

① 정삼각형　　② $a=b$인 이등변삼각형
③ $b=c$인 이등변삼각형　　④ a가 빗변인 직각삼각형
⑤ c가 빗변인 직각삼각형

해설

$a,\ b,\ c$가 삼각형의 세 변의 길이이므로
$a>0,\ b>0,\ c>0$
따라서, $a+b>0$이므로 준식은 이차식이다.
준식이 완전제곱식이 되려면
판별식 $D=0$
$\frac{D}{4}=c^2-(a+b)(a-b)=0$
정리하면, $c^2-a^2+b^2=0$
$\therefore\ a^2=b^2+c^2$
따라서, a가 빗변인 직각삼각형

21. 이차방정식 $x^2 - px + q = 0$의 두 근을 α, β라고 하자. α^2, β^2이 방정식 $x^2 - 3px + 4(q-1) = 0$의 두 근일 때, p의 값은?

① -4 또는 1 ② -3 또는 2 ③ -2 또는 3
④ -1 또는 4 ⑤ 2 또는 5

해설

$\alpha + \beta = p,\ \alpha\beta = q \cdots\cdots$ ㉠
$\alpha^2 + \beta^2 = 3p,\ \alpha^2\beta^2 = 4(q-1) \cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡에서
$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$
$\therefore\ 3p = p^2 - 2q \cdots\cdots$ ㉢
$\alpha^2\beta^2 = (\alpha\beta)^2$
$\therefore\ 4(q-1) = q^2 \cdots\cdots$ ㉣
㉣에서 $q^2 - 4q + 4 = 0,\ (q-2)^2 = 0$
$\therefore\ q = 2$
㉢에 대입하여 정리하면,
$p^2 - 3p - 4 = 0,\ (p+1)(p-4) = 0$
$\therefore\ p = -1,\ 4$

22. 이차방정식 $x^2 - 2x + a = 0$의 두 근을 α, β라 할 때, 두 수 $\alpha + \beta$, $\alpha\beta$를 두 근으로 하는 이차방정식이 $x^2 - bx + 4 = 0$이다. 이 때, 실수 $a + b$의 값을 구하면?

① 2　　② 4　　③ 6　　④ 8　　⑤ 10

해설

$x^2 - 2x + a = 0$의 두 근을 α, β라 하면
$\alpha + \beta = 2$, $\alpha\beta = a$
한편, $\alpha + \beta$, $\alpha\beta$를 두 근으로 하는 방정식은
$(\alpha + \beta) + \alpha\beta = a + 2$
$(\alpha + \beta) \cdot (\alpha\beta) = 2a$에서
$x^2 - (a + 2)x + 2a = 0$ $\cdots\cdots$ ㉠
㉠이 $x^2 - bx + 4 = 0$과 같으므로
$a + 2 = b$, $2a = 4$에서 $a = 2$, $b = 4$
$\therefore\ a + b = 2 + 4 = 6$

23. $A(n) = i^n + (-1)^n n$, $f(n) = A(1) + A(2) + \cdots + A(n)$ 이라 할 때, $f(10)+f(11)+f(12)+f(13)$ 의 값은? (단, n은 자연수이고 $i = \sqrt{-1}$ 이다.)

① $2i-2$　② $2i+2$　③ $2i-4$
④ $2i+4$　⑤ $4i-2$

해설

$$\begin{aligned} f(10) &= (i-1)+(i^2+2)+(i^3-3)+\cdots+(i^{10}+10) \\ &= (i+i^2+i^3+\ldots+i^{10}) \\ &\quad +(-1+2-3+\cdots+10) \\ &= (i-1)+(1+1+1+1+1) \\ &= i+4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(11) &= f(10)+i^{11}-11 \\ &= (i+4)+(-i-11) = -7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(12) &= f(11)+i^{12}+12 \\ &= -7+(1+12) = 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(13) &= f(12)+i^{13}-13 \\ &= 6+(i-13) = i-7 \end{aligned}$$

$\therefore f(10)+f(11)+f(12)+f(13)$
$= (i+4)+(-7)+6+(i-7) = 2i-4$

24. α, β 가 복소수일 때, 다음 중에서 참인 것을 <u>모두</u> 고르면? (단, $\overline{\alpha}$ 는 α 의 켤레복소수, $\overline{\beta}$ 는 β 의 켤레복소수이다.)

㉠ $\alpha = \overline{\beta}$ 일 때, $\alpha\beta = 0$이면 $\alpha = 0$이다.
㉡ $\alpha^2 + \beta^2 = 0$이면, $\alpha = 0$이고 $\beta = 0$이다.
㉢ $\alpha = \beta$이면, $\alpha + \beta$, $\alpha\beta$는 모두 실수이다.
㉣ $\alpha\overline{\beta} + \overline{\alpha}\beta$는 순허수이다.
㉤ $\alpha - \beta$가 실수이면 $\alpha > \beta$이다.

① ㉠ ② ㉠, ㉡ ③ ㉡, ㉢, ㉣
④ ㉠, ㉢, ㉣ ⑤ ㉠, ㉢, ㉣, ㉤

해설

$\alpha = a + bi\ ,\beta = c + di$ (a, b, c, d는 실수)
㉠ $\alpha = \overline{\beta} \Rightarrow \beta = \overline{\alpha}$
$\alpha\beta = 0 \ \Leftrightarrow \ \alpha\overline{\alpha} = 0$
$(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 = 0$
$\therefore a = 0, b = 0 \Rightarrow \alpha = 0$(참)
㉡ 반례 : $\alpha = 1, \beta = i$
㉢ $\alpha + \beta = 2a + 2bi, \alpha\beta = (a^2 - b^2) + 2abi$(거짓)
㉣ $\alpha\overline{\beta} + \overline{\alpha}\beta = 2(ac + bd) \Rightarrow$ 실수 (거짓)
㉤ $\alpha - \beta = (a - c) + (b - d)i \therefore b - d = 0,\ b = d$ $\alpha > \beta$ 는 알 수 없다(거짓)

25. $x^2+xy-2y^2+2x+7y+k=f(x,y)$라 할 때, $f(x,y)=0$이 두 개의 직선을 나타내도록 k의 값을 정하면?

① -5 ② -4 ③ -3 ④ -2 ⑤ -1

해설

$f(x,\ y)=x^2+(y+2)x-2y^2+7y+k=0$
주어진 식이 두 개의 직선을 나타내려면
$x,\ y$에 관한 일차식으로 인수분해되어야 하므로
근의 공식에서 근호 안의 식$(=D)$이 완전제곱꼴이어야 한다.
$D=(y+2)^2-4(-2y^2+7y+k)$
$\quad=9y^2-24y+4-4k\quad\cdots(\text{i})$
(i)이 완전제곱식이어야 하므로
(i)의 판별식
$\dfrac{D}{4}=(-12)^2-9(4-4k)=0$
$108+36k=0\qquad\therefore\ k=-3$