1. $z = \dfrac{2}{1-i}$ 일 때, $2z^2 - 4z - 1$ 의 값을 구하면?

① -1 ② 2 ③ -3 ④ 4 ⑤ -5

해설

$$z = \frac{2}{1-i} = 1+i$$

$$\begin{aligned} \therefore\ 2z^2 - 4z - 1 &= 2(1+i)^2 - 4(1+i) - 1 \\ &= 4i - 4 - 4i - 1 \\ &= \ -5 \end{aligned}$$

해설

$z = 1 + i, z - 1 = i$

양변을 제곱하고 정리하면

$z^2 - 2z = -2$

$2z^2 - 4z - 1$

$= 2(z^2 - 2)z - 1$

$= -4 - 1 = -5$

2. 복소수 $z = 1 - i$ 라고 할 때, $wz + 1 = \overline{w}$ 를 만족하는 복소수 w 의 실수부분을 구하면? (단, $\overline{w}$ 는 w 의 켤레복소수이다.)

① -2 ② -1 ③ 1 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 2

해설

$w = a + bi$ 라 하면

$$
\begin{aligned}
(a+bi)(1-i)+1 &= a - ai + bi + b + 1 \\
&= (a+b+1) - (a-b)i \\
&= a - bi \text{ 에서}
\end{aligned}
$$

$a + b + 1 = a$, $\therefore$ $b + 1 = 0$ 이므로 $b = -1$

$a - b = b$ 이므로 $a + 1 = -1$ 에서 $a = -2$

따라서 w 의 실수부분은 -2

3. 다음 계산 과정에서 최초로 틀린 부분은?

$$
\begin{aligned}
\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{-2}} &= \boxed{\text{㉠}}\ \frac{\sqrt{8}\cdot\sqrt{-2}}{\sqrt{-2}\cdot\sqrt{-2}} \\
&= \boxed{\text{㉡}}\ \frac{\sqrt{-16}}{\sqrt{-2}\cdot\sqrt{-2}} \\
&= \boxed{\text{㉢}}\ \frac{\sqrt{-16}}{2} \\
&= \boxed{\text{㉣}}\ \frac{4i}{2} \\
&= \boxed{\text{㉤}} = \sqrt{-4}
\end{aligned}
$$

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉢

해설

$\sqrt{-2}\sqrt{-2} = \sqrt{2}i\sqrt{2}i = 2i^2 = -2$

따라서 최초로 틀린 부분은 ㉢이다.

4. 방정식 $|x| + |x - 1| = 2$ 의 해를 구하시오.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $-\frac{1}{2}$ 또는 -0.5

▷ 정답 : $\frac{3}{2}$ 또는 1.5

해설

i) $x < 0$ 일 때,

$-x - (x - 1) = 2$ 이므로 $-2x + 1 = 2$

$\therefore \ x = -\frac{1}{2}$

ii) $0 \le x < 1$ 일 때,

$x - (x - 1) = 2$ 이므로 $0 \cdot x = 1$

$\therefore$ 해가 없다.

iii) $1 \le x$ 일 때,

$x + x - 1 = 2$ 이므로 $2x = 3$

$\therefore \ x = \frac{3}{2}$

(i), (ii), (iii) 에서 $x = -\frac{1}{2}$ 또는 $x = \frac{3}{2}$

5. x에 대한 이차방정식 $kx^2+(2k+1)x+6=0$의 해가 2, α일 때, $k+\alpha$의 값을 구하면?

① -1　② -2　③ -3　④ -4　⑤ -5

해설

해가 $2, \alpha$라면 방정식에 2를 대입하면 0이 된다.

$k \cdot 2^2 + (2k+1)2 + 6 = 0$

$4k + 4k + 8 = 0$에서 $k = -1$

$k = -1$을 방정식에 대입하고 α를 구한다.

$-x^2 - x + 6 = 0,\ x^2 + x - 6 = 0$

$(x+3)(x-2) = 0,\ x = 2, -3$

$\therefore k = -1,\ \alpha = -3$

$\therefore\ k + \alpha = -4$

6. x에 대한 이차방정식 $(k^2-1)x^2-2(k-1)x+1=0$이 허근을 가질 때, $k>m$이다. m의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$(k^2-1)x^2-2(k-1)x+1=0$이
허근을 가지려면

$\frac{D}{4}=(k-1)^2-(k^2-1)<0$

$(k^2-2k+1)-(k^2-1)<0$

$-2k+2<0,\ k>1$

$\therefore\ m=1$

7. 이차방정식 $x^2+2(k-a)x+k^2+a^2+b-2=0$이 실수 k의 값에 관계없이 중근을 가질 때, $a+b$의 값을 구하라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 2

해설

$$\frac{D}{4}=(k-a)^2-(k^2+a^2+b-2)=0$$

$\therefore\ -2ka-b+2=0$

이 식은 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로

k에 대한 항등식이다.

$a=0,\ b=2$

$\therefore\ a+b=2$

8. $x^2 + ax + b = 0$ (a, b 는 실수)의 한 근이 $1 + i$ 일 때, a 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

한 근이 $1 + i$ 이므로,
켤레근 $1 - i$ 도 식의 근.
$(1 + i) + (1 - i) = -a$
$\therefore\ a = -2$

9. 복소수 $z=(1+i)x+1-2i$에 대하여 z^2이 음의 실수일 때, 실수 x의 값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** $x=-1$

해설

$z = (1+i)x+1-2i = (x+1)+(x-2)i$

z^2의 음의실수 $\Leftrightarrow$ z가 순허수

$\therefore\ x+1=0,\quad x=-1$

10. x 에 대한 방정식 $(a-2)(x-a)=0$ 의 풀이 과정에서 다음 중 옳은 것은?

① $a=0$ 일 때, $x=2$

② $a \neq 2$ 일 때, $x=a$

③ $a=2$ 일 때, 불능

④ $a=0$ 일 때, 부정

⑤ 해는 없다.

해설

$(a-2)(x-a)=0$

$\Rightarrow \quad a=2$ 또는 $x=a$

i) $a=2$ 일 때 : 부정

ii) $a \neq 2$ 일 때 : $x=a$

11. 이차방정식 $(2-\sqrt{3})x^2-2(\sqrt{3}-1)x-6=0$의 두 근 중 큰 근에 가장 가까운 정수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

이차항의 계수를 유리수로 고치기 위해 방정식의 양변에 $2+\sqrt{3}$을 곱하면

$x^2-2(\sqrt{3}+1)x-(12+6\sqrt{3})=0$

근의 공식을 이용해 위 방정식을 풀면

$$x=(\sqrt{3}+1)\pm\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2+12+6\sqrt{3}}$$

$$=(\sqrt{3}+1)\pm 2\sqrt{4+2\sqrt{3}}$$

$$=(\sqrt{3}+1)\pm 2(\sqrt{3}+1)$$

$\therefore\ x=3\sqrt{3}+3$ 또는 $x=-\sqrt{3}-1$

큰 근은 $3\sqrt{3}+3$

그런데 $\sqrt{3}\fallingdotseq 1.7\cdots$이므로

가장 가까운 정수는 8이다.

12. 방정식 $x^2-2|x|-3=0$의 근의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

i) $x \geq 0$일 때

$x^2-2x-3=0$, $(x+1)(x-3)=0$

$x=-1$ 또는 $x=3$

그런데 $x \geq 0$이므로 $x=3$

ii) $x<0$일 때

$x^2+2x-3=0$, $(x-1)(x+3)=0$

$x=1$ 또는 $x=-3$

그런데 $x<0$이므로 $x=-3$

(i), (ii)에서 $x=3$ 또는 $x=-3$

따라서 근의 합은 0이다.

13. $x^2-2x+3=0$의 두 근을 α, β라고 할 때, $(\alpha^2-2\alpha)(\beta^2-2\beta)$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$x^2-2x+3=0$ 에서 근과 계수의 관계에 의해

$\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=3$

$(\alpha^2-2\alpha)(\beta^2-2\beta)$

$=\alpha^2\beta^2-2\alpha^2\beta-2\alpha\beta^2+4\alpha\beta$

$=(\alpha\beta)^2-2\alpha\beta(\alpha+\beta)+4\alpha\beta$

$=9-6\cdot 2+12=9$

14. x에 대한 이차방정식 $ax^2+2(a-1)x-(a+1)=0$은 어떤 근을 갖는지 판별하시오. (단, a는 실수)

① 중근

② 한 실근과 한 허근

③ 서로 다른 두 실근

④ 서로 같은 두 실근

⑤ 서로 다른 두 허근

해설

$ax^2+2(a-1)x-(a+1)=0$

$\dfrac{D}{4}=(a-1)^2+a(a+1)$

$=a^2-2a+1+a^2+a$

$=2a^2-a+1=2\left(a^2-\dfrac{1}{2}a\right)+1$

$=2\left(a^2-\dfrac{1}{2}a+\dfrac{1}{16}\right)+1-\dfrac{1}{8}$

$=2\left(a-\dfrac{1}{4}\right)^2+\dfrac{7}{8}>0$

따라서 서로 다른 두 실근을 갖는다.

15. 이차방정식 $2x^2-4x-3k=0$이 허근을 갖고, 동시에 $x^2+5x-2k=0$이 실근을 갖도록 하는 정수 k의 개수를 구하면?

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

$2x^2-4x-3k=0$이 허근을 가질 조건은

$$\frac{D}{4}=4+6k<0$$

$$\therefore\ k<-\frac{2}{3}\quad \cdots\cdots ㉠$$

$x^2+5x-2k=0$이 실근을 가질 조건은

$$D=25+8k\ge 0$$

$$\therefore\ k\ge -\frac{25}{8}\quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $-\frac{25}{8}\le k<-\frac{2}{3}$

따라서, 정수 $k=-3,\ -2,\ -1$

$\therefore$ 정수 k의 개수는 3개

16. 종섭이와 성제가 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ 을 각각 풀었다. 종섭이는 x 의 계수를 잘못 봐서 $3-2i,\ 3+2i$ 라는 근을 구했고, 성제는 상수항을 잘못 봐서 $2-i,\ 2+i$ 라는 근을 구했을 때, $\left|\dfrac{bc}{a^2}\right|$ 의 값은?

▶ 답 :

▷ 정답 : 52

해설

종섭이는 x 의 계수를 잘못 보았으므로 상수항은 참이다.

두 근의 곱 $=\dfrac{c}{a}=(3-2i)(3+2i)=9+4=13$

성제는 상수항을 잘못 보았으므로 x 의 계수는 참이다.

두 근의 합$=-\dfrac{b}{a}=2-i+2+i=4$

$\therefore \left|\dfrac{bc}{a^2}\right|=\left|\dfrac{b}{a}\times\dfrac{c}{a}\right|=|-4\times 13|=|-52|=52$

17. x에 대한 이차방정식 $x^2-(k-3)x+k+2=0$의 두 근이 모두 양수일 때 실수 k의 값의 범위는?

① $k \geq -5-2\sqrt{6}$ ② $k \geq -5+2\sqrt{6}$ ③ $k \geq -5+\sqrt{6}$

④ $k \geq 5+\sqrt{6}$ ⑤ $k \geq 5+2\sqrt{6}$

해설

$x^2-(k-3)x+k+2=0$에서

$D=(k-3)^2-4(k+2)$

$=k^2-6k+9-4k-8$

$=k^2-10k+1 \geq 0$

$\therefore k \leq 5-2\sqrt{6}$ 또는 $k \geq 5+2\sqrt{6}$

두 근의 합 $k-3>0$이므로 $k>3$

두 근의 곱 $k+2>0$이므로 $k>-2$

따라서 $k \geq 5+2\sqrt{6}$

18. 복소수 $z = a + bi$ (단, a, b는 실수, $i = \sqrt{-1}$를 좌표평면 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$에 대응시킬 때, $(2-3i)z$가 실수가 되게 하는 점 P가 그리는 도형은?

① 원
② 아래로 볼록한 포물선
③ 위로 볼록한 포물선
④ 기울기가 음인 직선
⑤ 기울기가 양인 직선

해설

$$
\begin{aligned}
(2-3i)z &= (2-3i)(a+bi) \\
&= (2a+3b) + (2b-3a)i
\end{aligned}
$$

$\therefore\ 2b - 3a = 0 \quad \therefore\ b = \dfrac{3}{2}a \Rightarrow$ 기울기가 양인 직선

19. 복소수 $z = \dfrac{2}{1+i}$ 에 대하여 $z^3 - 2z^2 + 2z + 5$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$z = \frac{2}{1+i} = 1 - i$$

$$z^2 = -2i,\ z^3 = -2 - 2i$$

$$\therefore\ z^3 - 2z^2 + 2z + 5$$

$$= (-2i - 2) - 2(-2i) + 2(1 - i) + 5$$

$$= 5$$

해설

$$\begin{aligned} z = 1 - i \quad &\Rightarrow \quad z - 1 = -i \\ &\Rightarrow \quad z^2 - 2z + 1 = -1 \\ &\Rightarrow \quad z^2 - 2z + 2 = 0 \end{aligned}$$

$$z^3 - 2z^2 + 2z + 5 = z(z^2 - 2z + 2) + 5 = 5$$

20. a, b, c가 삼각형의 세 변의 길이를 나타낼 때, $(a+b)x^2 + 2cx + a - b$는 x의 완전제곱식이다. 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

① 정삼각형
② $a = b$인 이등변삼각형
③ $b = c$인 이등변삼각형
④ a가 빗변인 직각삼각형
⑤ c가 빗변인 직각삼각형

해설

$a,\ b,\ c$가 삼각형의 세 변의 길이이므로
$a > 0,\ b > 0,\ c > 0$
따라서, $a + b > 0$이므로 준식은 이차식이다.
준식이 완전제곱식이 되려면
판별식 $D = 0$

$$\frac{D}{4} = c^2 - (a+b)(a-b) = 0$$

정리하면, $c^2 - a^2 + b^2 = 0$
$\therefore\ a^2 = b^2 + c^2$
따라서, a가 빗변인 직각삼각형

21. 이차방정식 $x^2 - px + q = 0$의 두 근을 α, β라고 하자. α^2, β^2이 방정식 $x^2 - 3px + 4(q-1) = 0$의 두 근일 때, p의 값은?

① -4 또는 1 ② -3 또는 2 ③ -2 또는 3

④ -1 또는 4 ⑤ 2 또는 5

해설

$\alpha + \beta = p,\ \alpha\beta = q \cdots\cdots$ ㉠

$\alpha^2 + \beta^2 = 3p,\ \alpha^2\beta^2 = 4(q-1) \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서

$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta$

$\therefore\ 3p = p^2 - 2q \cdots\cdots$ ㉢

$\alpha^2\beta^2 = (\alpha\beta)^2$

$\therefore\ 4(q-1) = q^2 \cdots\cdots$ ㉣

㉣에서 $q^2 - 4q + 4 = 0,\ (q-2)^2 = 0$

$\therefore\ q = 2$

㉢에 대입하여 정리하면,

$p^2 - 3p - 4 = 0,\ (p+1)(p-4) = 0$

$\therefore\ p = -1,\ 4$

22. 이차방정식 $x^2-2x+a=0$의 두 근을 α, β라 할 때, 두 수 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$를 두 근으로 하는 이차방정식이 $x^2-bx+4=0$이다. 이 때, 실수 $a+b$의 값을 구하면?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$x^2-2x+a=0$의 두 근을 α, β라 하면

$\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=a$

한편, $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$를 두 근으로 하는 방정식은

$(\alpha+\beta)+\alpha\beta=a+2$

$(\alpha+\beta)\cdot(\alpha\beta)=2a$에서

$x^2-(a+2)x+2a=0$ $\cdots\cdots$ ㉠

㉠이 $x^2-bx+4=0$과 같으므로

$a+2=b$, $2a=4$에서 $a=2$, $b=4$

$\therefore\ a+b=2+4=6$

23. $A(n) = i^n + (-1)^n n$, $f(n) = A(1) + A(2) + \cdots + A(n)$이라 할 때, $f(10) + f(11) + f(12) + f(13)$의 값은? (단, n은 자연수이고 $i = \sqrt{-1}$이다.)

① $2i - 2$ ② $2i + 2$ ③ $2i - 4$

④ $2i + 4$ ⑤ $4i - 2$

해설

$$\begin{aligned} f(10) &= (i-1) + (i^2+2) + (i^3-3) + \cdots + (i^{10}+10) \\ &= (i + i^2 + i^3 + \ldots + i^{10}) \\ &\quad + (-1 + 2 - 3 + \cdots + 10) \\ &= (i-1) + (1+1+1+1+1) \\ &= i + 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(11) &= f(10) + i^{11} - 11 \\ &= (i+4) + (-i-11) = -7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(12) &= f(11) + i^{12} + 12 \\ &= -7 + (1+12) = 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(13) &= f(12) + i^{13} - 13 \\ &= 6 + (i-13) = i - 7 \end{aligned}$$

$$\therefore f(10) + f(11) + f(12) + f(13)$$
$$= (i+4) + (-7) + 6 + (i-7) = 2i - 4$$

24. α, β 가 복소수일 때, 다음 중에서 참인 것을 <u>모두</u> 고르면? (단, α 는 $\overline{\alpha}$ 의 켤레복소수, $\overline{\beta}$ 는 β 의 켤레복소수이다.)

> ㉠ $\alpha = \overline{\beta}$ 일 때, $\alpha\beta = 0$이면 $\alpha = 0$이다.
>
> ㉡ $\alpha^2 + \beta^2 = 0$이면, $a = 0$이고 $\beta = 0$이다.
>
> ㉢ $\alpha = \beta$이면, $\alpha + \beta$, $\alpha\beta$는 모두 실수이다.
>
> ㉣ $\alpha\overline{\beta} + \overline{\alpha}\beta$는 순허수이다.
>
> ㉤ $\alpha - \beta$가 실수이면 $\alpha > \beta$이다.

① ㉠　　② ㉠, ㉡　　③ ㉡, ㉢, ㉣

④ ㉠, ㉢, ㉣　　⑤ ㉠, ㉢, ㉣, ㉤

해설

$\alpha = a + bi$,$\beta = c + di$ (a, b, c, d는 실수)

㉠ $\alpha = \overline{\beta} \Rightarrow \beta = \overline{\alpha}$

$\alpha\beta = 0 \;\;\Leftrightarrow\;\; \alpha\overline{\alpha} = 0$

$(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 = 0$

$\therefore a = 0, b = 0 \Rightarrow \alpha = 0$(참)

㉡ 반례 : $\alpha = 1, \beta = i$

㉢ $\alpha + \beta = 2a + 2bi, \alpha\beta = (a^2 - b^2) + 2abi$(거짓)

㉣ $\alpha\overline{\beta} + \overline{\alpha}\beta = 2(ac + bd) \Rightarrow$ 실수 (거짓)

㉤ $\alpha - \beta = (a - c) + (b - d)i \therefore b - d = 0,\;\; b = d$ $\alpha > \beta$ 는 알 수 없다(거짓)

25. $x^2+xy-2y^2+2x+7y+k=f(x,y)$라 할 때, $f(x,y)=0$이 두 개의 직선을 나타내도록 k의 값을 정하면?

① -5 ② -4 ③ -3 ④ -2 ⑤ -1

해설

$f(x,\ y)=x^2+(y+2)x-2y^2+7y+k=0$

주어진 식이 두 개의 직선을 나타내려면

$x,\ y$에 관한 일차식으로 인수분해되어야 하므로

근의 공식에서 근호 안의 식$(=D)$이 완전제곱꼴이어야 한다.

$D=(y+2)^2-4(-2y^2+7y+k)$

$\quad=9y^2-24y+4-4k\quad\cdots(\text{i})$

(i)이 완전제곱식이어야 하므로

(i)의 판별식

$\frac{D}{4}=(-12)^2-9(4-4k)=0$

$108+36k=0\qquad\therefore\ k=-3$