1. 이차함수 $y = x^2 - 8x + a$의 그래프와 x축과의 교점의 x좌표가 6, b일 때, $a + b$의 값은?

① 11　② 12　③ 13　④ 14　⑤ 15

해설

이차함수 $y = x^2 - 8x + a$의 그래프와
x축과의 교점의 x좌표는
이차방정식 $x^2 - 8x + a = 0$의 실근이다.
$x^2 - 8x + a = 0$에 $x = 6$을 대입하면
$36 - 48 + a = 0$에서 $a = 12$
따라서 $x^2 - 8x + 12 = 0$에서 $(x-2)(x-6) = 0$
$x = 2$ 또는 $x = 6$
$\therefore\ b = 2 \therefore\ a + b = 14$

2. 직선 $y = 3x + 2$ 와 포물선 $y = x^2 + mx + 3$ 이 두 점에서 만나기 위한 실수 m 의 범위를 구하면?

① $m < -1, m > 3$ ② $m < 1, m > 5$ ③ $-1 < m < 3$
④ $-1 < m < 5$ ⑤ $1 < m < 5$

해설

$y = 3x + 2, y = x^2 + mx + 3$ 에서 y 를 소거하면
$x^2 + (m-3)x + 1 = 0, D = (m-3)^2 - 4 > 0$
$m^2 - 6m + 5 > 0, (m-1)(m-5) > 0$
$\therefore\ m < 1,\ m > 5$

3. 이차함수 $y = x^2 - 2ax - 2b^2 - 4a + 4b - 6$ 의 그래프가 x축에 접할 때, $a^2 + b^2$ 의 값은? (단, a, b는 실수)

① 2　② 5　③ 8　④ 10　⑤ 13

해설

$x^2 - 2ax - 2b^2 - 4a + 4b - 6 = 0$에서

$\frac{D}{4} = a^2 - (-2b^2 - 4a + 4b - 6) = 0$

$\therefore (a+2)^2 + 2(b-1)^2 = 0$

이 때, a, b가 실수이므로 $a + 2 = 0, b - 1 = 0$

따라서 $a = -2, b = 1$이므로

$a^2 + b^2 = 5$

4. 이차함수 $y = x^2 - 6x - 10$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -19

해설

$y = x^2 - 6x - 10 = (x-3)^2 - 19$
$x = 3$ 일 때, 최솟값은 -19 이다.

5. 이차함수 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 가 $x = -1$ 에서 최댓값 7 을 갖고, $f(2) = -2$ 를 만족할 때, 상수 $a + b + c$ 의 값을 구하면?

① 3 ② 7 ③ 11 ④ -3 ⑤ -5

해설

$f(x) = a(x+1)^2 + 7, f(2) = -2$
$\Rightarrow 3^2 \times a + 7 = -2, a = -1$
$\therefore\ f(x) = -(x+1)^2 + 7 = -x^2 - 2x + 6$
따라서 $a + b + c = 3$

6. x의 범위가 $-1 \le x \le 2$ 일 때, 이차함수 $y=-2x^2+4x+1$ 의 최댓값을 구하면?

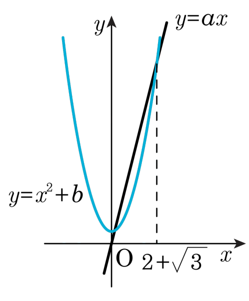
① -2 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$y=-2(x-1)^2+3$

$\therefore x=1$ 일 때, 최댓값 3

7. 다음 그림과 같이 이차함수 $y = x^2 + b$ 의 그래프와 직선 $y = ax$ 가 서로 두 점에서 만나고, 한 교점의 x 좌표가 $2 + \sqrt{3}$ 일 때, $a + b$ 의 값은?(단, a, b 는 유리수)



① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$x^2 + b = ax$,
즉 $x^2 - ax + b = 0$ 의 한 근이 $2 + \sqrt{3}$ 이다.
이때, a, b 는 모두 유리수이므로
방정식 $x^2 - ax + b = 0$ 의 한 근이 $2 + \sqrt{3}$ 이면
다른 한 근은 $2 - \sqrt{3}$ 이다.
따라서 근과 계수와의 관계에 의하여
$a = (2 + \sqrt{3}) + (2 - \sqrt{3}) = 4$,
$b = (2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 1$
$\therefore\ a + b = 5$

8. $0 \le x \le 3$ 에서 함수 $f(x) = x^2 - ax$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M + m$ 의 최댓값은? (단, $0 \le a \le 2$)

① 1　　② 3　　③ 5　　④ 7　　⑤ 9

해설

$f(x) = x^2 - ax = \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4}$ $(0 \le x \le 3)$

$0 \le \frac{a}{2} \le 1$ 이므로

최솟값 $m = f\left(\frac{a}{2}\right) = -\frac{a^2}{4}$,

최댓값 $M = f(3) = 9 - 3a$

$\therefore M + m = 9 - 3a - \frac{1}{4}a^2 = -\frac{1}{4}(a+6)^2 + 18$

이때, $0 \le a \le 2$ 이므로

$M + m$ 은 $a = 0$ 일 때 최댓값 9 를 갖는다.

9. 차가 16 인 두 수가 있다. 두 수의 곱의 최솟값을 구하면?

① 4 ② 32 ③ 43 ④ -26 ⑤ -64

해설

차가 16 인 두 수가 있다. 한 수를 x 로 두면 나머지 한 수는 $(x+16)$ 이다.

$y = x(x+16) = x^2 + 16x = (x^2 + 16x + 64) - 64$

$y = (x+8)^2 - 64$

10. x, y가 실수일 때, $x^2 - 6x + 2y^2 + 4y + 7$의 최솟값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -4

해설

$x^2 - 6x + 2y^2 + 4y + 7$
$= (x-3)^2 + 2(y+1)^2 - 4$이므로
$x = 3,\ y = -1$일 때, 최솟값 -4를 갖는다.

11. 두 실수 x, y가 $x^2+y^2+4x+y-2=0$을 만족시킬 때, y의 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$x^2+4x+(y^2+y-2)=0$에서 x가 실수이므로

$\frac{D}{4}=4-y^2-y+2\geq 0$

$(y+3)(y-2)\leq 0$

$\therefore -3\leq y\leq 2$

따라서 y의 최댓값은 2, 최솟값은 -3이다.

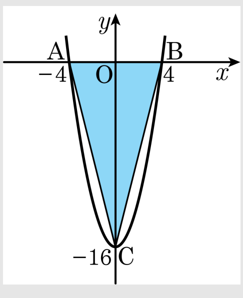
12. 이차함수 $y = x^2 - 16$ 의 그래프에서 x 축과의 교점을 A, B 라 하고 꼭짓점을 C 라 할 때, △ABC 의 넓이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 64

해설

x 축과의 교점A, B 는 $x^2 - 16 = 0$ 의 근과 같다.
따라서 $x = \pm 4$ 이다.



꼭짓점의 좌표는 $(0,\ -16)$ 이다.

구하는 넓이는 $\frac{1}{2} \times 8 \times 16 = 64$ 이다.

13. 둘레의 길이가 24 인 철사를 구부려서 부채꼴 모양을 만들려고 한다. 부채꼴의 넓이를 y 라고 할 때, 부채꼴의 넓이의 최댓값을 구하면?

① 18 ② 20 ③ 30 ④ 32 ⑤ 36

해설

반지름의 길이를 x 라 하면 호의 길이는 $24-2x$ 이다.

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2}\times x\times(24-2x) \\ &= x(12-x) \\ &= -x^2+12x \\ &= -(x^2-12x+36-36) \\ &= -(x-6)^2+36 \end{aligned}$$

이차함수는 위로 볼록이므로 꼭짓점이 최댓값을 나타낸다.
따라서 꼭짓점이 $(6, 36)$ 이므로 반지름의 길이 $x=6$ 일 때, 부채꼴의 넓이 y 가 최댓값 36 을 가진다.

14. 둘레의 길이가 $40\,\text{cm}$ 인 부채꼴의 넓이가 최대가 될 때, 반지름의 길이 및 최대 넓이 S 를 구하여라.

▶ 답: ______ cm^2

▷ 정답: $100\,\text{cm}^2$

해설

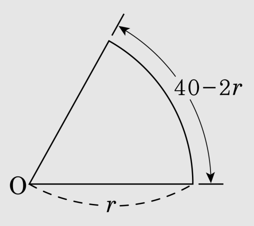
부채꼴의 반지름의 길이를 $r\text{cm}$ 라 하면

$S = \frac{1}{2} \times r \times (40 - 2r) = r(20 - r)$

$= -r^2 + 20r = -(r - 10)^2 + 100$

한편 $r > 0$ 이고 $40 - 2r > 0$ 이므로 $0 < r < 20$

따라서 $y = 10$ 일 때 최대 넓이는 100m^2 이다.



15. $x=2$ 일 때 최솟값 -1 을 갖고, y 절편이 3 인 포물선을 그래프로 하는 이차함수의 식을 $y=a(x-p)^2+q$ 라 할 때, 상수 a, p, q 의 곱 apq 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -2

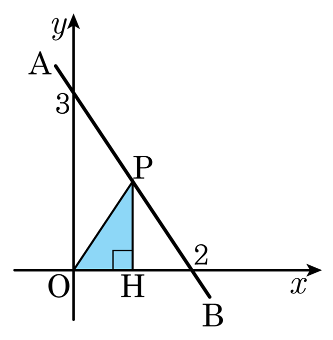
해설

$y=a(x-2)^2-1$
$\quad =a(x^2-4x+4)-1$
$\quad =ax^2+4ax+4a-1$

$4a-1=3$
$a=1$

$y=(x-2)^2-1$
$apq=1\times2\times(-1)=-2$

16. 선분 AB 위의 한 점 P 에서 x 축에 내린 수선의 발을 H 라고 할 때, △POH 의 넓이의 최댓값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 0.75

해설

$\overline{\mathrm{AB}}$ 를 지나는 직선은 두 점 (0, 3) , (2, 0) 을 지나므로

$y=-\frac{3}{2}x+3$

H 점의 좌표를 $(a,\ 0)$ 이라고 하면, 점 P 의 좌표는 $\left(a, -\frac{3}{2}a+3\right)$

$$\begin{aligned}\triangle \mathrm{POH} &= \frac{1}{2}\times a\times\left(-\frac{3}{2}a+3\right)\\ &= -\frac{3}{4}a^2+\frac{3}{2}a\\ &= -\frac{3}{4}(a^2-2a+1-1)\\ &= -\frac{3}{4}(a-1)^2+\frac{3}{4}\end{aligned}$$

따라서 최댓값은 $\frac{3}{4}$ 이다.

17. 지상 22m 되는 위치에서 초속 30m 로 위로 던져 올린 공의 t 초 후의 높이를 hm 라 하면 $h = -5t^2 + 30t + 22$ 인 관계가 성립한다. 이 공은 몇 초 후에 최고 높이에 도달하는가?

① 1 초 ② 2 초 ③ 3 초 ④ 4 초 ⑤ 5 초

해설

$h = -5(t^2 - 6t + 9 - 9) + 22$
$= -5(t - 3)^2 + 67$

$t = 3$ 일 때, 최댓값 $h = 67$

18. x에 대한 이차함수 $y = x^2 - 2kx + k^2 + 2k - 3$ 의 그래프가 k의 값에 관계없이 항상 직선 $y = ax + b$ 에 접한다. 이 때, 두 상수 a, b의 합 $a + b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$y = x^2 - 2kx + k^2 + 2k - 3 = ax + b$

$x^2 - (2k + a)x + k^2 + 2k - 3 - b = 0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 $\mathrm{D} = 0$ 이어야 하므로

$\mathrm{D} = (2\mathrm{k} + \mathrm{a})^2 - 4\left(\mathrm{k}^2 + 2\mathrm{k} - 3 - \mathrm{b}\right) = 0$

$4k(a - 2) + a^2 + 4b + 12 = 0$

위의 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므 로

$a - 2 = 0,\ a^2 + 4b + 12 = 0$

$\therefore a = 2,\ b = -4$

$\therefore a + b = -2$

19. 함수 $y=-x^2+kx$의 그래프가 직선 $y=-x+4$에 접할 때, 양수 k의 값은?

① 1　　② $\frac{3}{2}$　　③ 2　　④ $\frac{5}{2}$　　⑤ 3

해설

$y=-x^2+kx$가 $y=-x+4$에 접하려면
$4-x=-x^2+kx \Rightarrow x^2-(k+1)x+4=0$의 판별식은 $D=0$이어야 한다.
$D=(k+1)^2-16=0 \Rightarrow k+1=\pm 4$
$\therefore k=3\ (\because k>0)$

20. 곡선 $y = -x^2 + kx$ 과 직선 $y = x + 1$ 이 서로 다른 두점에서 만나도록 하는 k 의 값이 아닌 것은?

① -6　② -3　③ 3　④ 6　⑤ 9

해설

곡선과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면
$-x^2 + kx = x + 1$ 의 판별식이 0 보다 커야 한다.
$\Rightarrow \quad x^2 + (1-k)x + 1 = 0$
$D = (1-k)^2 - 4 > 0$, $(k+1)(k-3) > 0$
$k < -1$ 또는 $k > 3$
$\therefore$ 3은 주어진 조건을 만족시키지 못한다.