1. $n(A)=26,\ n(B)=17$ 이고, $n(A\cap B)=8$ 일 때, $n(A-B)$ 의 값은?

① 9 ② 11 ③ 18 ④ 25 ⑤ 26

해설

$n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$

$n(A-B)=26-8=18$

2. 집합 $M = \{x \mid |x| < m \text{인 유리수}\}$ 의 부분집합 A_n 을 $A_n = \left\{ x \in M \;\middle|\; x - [x] = \frac{1}{n},\ n\text{은 } 2 \text{ 이상의 자연수} \right\}$ 라고 정의하자. A_n 의 원소의 개수가 30 일 때, 정수 m 의 값은? (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대 정수이다.)

① 13 ② 15 ③ 17 ④ 19 ⑤ 21

해설

집합 A_2 에서 $x - [x] = \frac{1}{2}$ 이므로

$$A_2 = \left\{ \cdots,\ -\frac{5}{2},\ -\frac{3}{2},\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{2},\ \frac{5}{2}, \cdots \right\}$$

집합 A_3 에서 $x - [x] = \frac{1}{3}$ 이므로

$$A_3 = \left\{ \cdots,\ -\frac{8}{3},\ -\frac{5}{3},\ -\frac{2}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{4}{3},\ \frac{7}{3}, \cdots \right\}$$

집합 A_n 에서 $x - [x] = \frac{1}{n}$ 이므로

$$A_n = \left\{ \cdots,\ -2 + \frac{1}{n},\ -1 + \frac{1}{n},\ \frac{1}{n},\ 1 + \frac{1}{n},\ 2 + \frac{1}{n}, \cdots \right\}$$

따라서 A_n 의 원소는 n 의 값에 관계없이 모든 정수 사이에 1 개씩 있으므로 원소의 개수가 30 일 때 $m = 15$

3. 다음 중 명제와 그 역이 모두 참인 것은?

① $xy \geq 0$ 이면 $x \geq 0$ 또는 $y \geq 0$

② $x+y \geq 0$ 이면 $x \geq 0$ 이고 $y \geq 0$

③ $x \geq y$ 이면 $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{y}$

④ $x \leq 2$ 이면 $|x-1| \leq |x-3|$

⑤ $a > 0$ 이고 $b > 0$ 이면 $a^2+b^2 > 0$

해설

① 거짓 : (반례) $x=-2,\ y=-1$ 일 때,
$xy = 2 \geq 0$ 이지만 $-2<0$ 이고 $-1<0$ 이다.
② 거짓 : (반례) $x=-2,\ y=3$ 일 때,
$x+y=-2+3 \geq 0$ 이지만 $-2<0$ 이고 $3>0$ 이다.
③ 거짓 : (반례) $x=2,\ y=-2$ 일 때,
$2 \geq -2$ 이지만 $\frac{1}{2} > -\frac{1}{2}$ 이다.
④ $|x-1| \leq |x-3|$ 의 양변을 제곱하면
$x^2-2x+1 \leq x^2-6x+9$ 에서 $x \leq 2$ 이므로 원래의 명제와 그 역이 모두 참이다.
⑤ 명제 '$a>0$ 이고 $b>0$ 이면 $a^2+b^2>0$' 은 참이지만, 그의 역 '$a^2+b^2>0$ 이면 $a>0$ 이고 $b>0$'은 거짓이다.

4. 실수 x에 대하여 다음 명제가 참일 때, a의 최솟값을 구하여라.

$x > a$이면 $\lvert x-2 \rvert > 4$

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

주어진 명제가 참이므로
대우 '$\lvert x-2 \rvert \le 4$ 이면 $x \le a$ 이다.' 가 참이다.
$\lvert x-2 \rvert \le 4$ 에서
$-4 \le x-2 \le 4$, $-2 \le x \le 6$이므로
$\therefore\ a \ge 6$
따라서 a 의 최솟값은 6이다.

5. 네 명의 테니스 선수 정하, 준화, 경진, 선희가 토너먼트 경기를 하였다. 경기를 관람한 세 사람 A, B, C 에게 경기 결과를 물어 보았더니 다음과 같이 대답하였다.

> A : 선희가 1 등, 경진이가 3 등을 했습니다.
> B : 준화가 2 등, 선희가 3 등을 했습니다.
> C : 정하가 1 등, 준화가 4 등을 했습니다.

이들 모두 두 선수의 순위를 대답했지만 그 두 선수의 순위 중 하나는 옳고 하나는 틀리다고 한다. 실제 선수들의 순위를 바르게 나열한 것은?

① 1등 : 경진, 2등 : 준화, 3등 : 정하, 4등 : 선희
② 1등 : 선희, 2등 : 정하, 3등 : 경진, 4등 : 준화
③ 1등 : 정하, 2등 : 준화, 3등 : 경진, 4등 : 선희
④ 1등 : 정하, 2등 : 경진, 3등 : 준화, 4등 : 선희
⑤ 1등 : 정하, 2등 : 준화, 3등 : 선희, 4등 : 경진

해설

만일, 선희가 1등한 것이 참이면 준화가 2등이고 정하가 1등이니 모순이다.
그러면, 경진이가 3등인 것이 참인데, 그렇게 되면 B의 대답에서 선희가 3등이라는 것이 거짓이므로 준화가 2등이고 준화가 4등인 것이 거짓이므로 정하가 1등이다.
따라서 1등은 정하, 2등은 준화, 3등은 경진, 4등은 선희가 된다.

6. 다음 <보기> 중에서 자연수 전체의 집합 N에서 N으로의 함수가 되는 것을 모두 고르면?

보기

㉠ 자연수 n에 대하여 $\sqrt{n}$을 대응시킨다.

㉡ 자연수 n에 n의 양의 약수의 개수를 대응시킨다.

㉢ 홀수에는 1, 짝수에는 2, 소수에는 3을 대응시킨다.

① ㉠　② ㉡　③ ㉠, ㉡　④ ㉡, ㉢　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

자연수에서 자연수로의 함수라는 말의 의미는
정의역이 자연수 일 때, 치역도 자연수인 함수를
찾으라는 말이다. 그런데 이때 ㉠은 무리수가
치역에 포함되지 않으므로 정의에 타당하지 않다.
㉢에서 2는 짝수이며 소수이므로 옳지 않다.
따라서 ㉡만 옳다.

7. 두 함수 $f(x) = 2x - 1$, $g(x) = -x + 5$에 대하여 $(f \circ g^{-1})(a) = 1$이 성립할 때 상수 a의 값은 얼마인가?

① 0　② 1　③ 2　④ 3　⑤ 4

해설

$(f \circ g^{-1})(a) = 1$에서
$f(g^{-1}(a)) = 1$ $f(1) = 1$이므로
$\therefore g^{-1}(a) = 1$에서 $a = g(1) = 4$

8. 함수 $f(x)=ax+b$ 에 대하여 $f^{-1}(1)=2$, $f(1)=2$ 일 때, $f(3)$ 의 값을 구하여라.

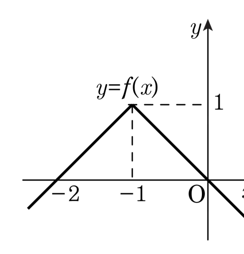
▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$f(2)=2a+b=1,\ \ f(1)=a+b=2$
연립하면 $a=-1,\ b=3$
$\therefore\ f(3)=3a+b=0$

9. 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 이 그래프의 관계식을 구하면?



① $y = |x-1| - 1$

② $y = |x+1| - 1$

③ $y = |x-1| + 1$

④ $y = -|x+1| + 1$

⑤ $y = -|x+1| - 1$

해설

주어진 그래프는 함수 $y = -|x|$ 의 그래프를
x 축의 방향으로 -1 만큼,
y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동한 것이므로
$y = -|x|$ 에 x 대신 $x+1$,
y 대신 $y-1$ 을 대입하면 $y-1 = -|x+1|$
즉, $f(x) = -|x+1| + 1$ 이므로 $y = -|x+1| + 1$

10. 함수 $y = |x+1| - |x-3|$ 의 최댓값을 M, 최솟값을 m 이라 할 때, $M - m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$y = |x+1| - |x-3|$ 에서

i) $x < -1$ 일 때

$y = -(x+1) + x - 3 = -4$

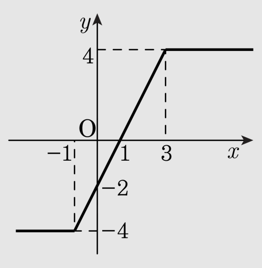
ii) $-1 \le x < 3$ 일 때

$y = x + 1 + x - 3 = 2x - 2$

iii) $x \ge 3$ 일 때

$y = x + 1 - (x-3) = 4$

이상에서 주어진 함수의 그래프가 다음 그림과 같으므로



$M = 4, m = -4$

$\therefore M - m = 4 - (-4)$

$= 8$

11. 번분수식 $1-\dfrac{\dfrac{1}{a}-\dfrac{2}{a+1}}{\dfrac{1}{a}-\dfrac{2}{a-1}}$ 를 간단히 하면?

① $\dfrac{a}{(a+1)^2}$ ② $\dfrac{2a}{(a+1)^2}$ ③ $\dfrac{3a}{(a+1)^2}$
④ $\dfrac{4a}{(a+1)^2}$ ⑤ $\dfrac{5a}{(a+1)^2}$

해설

$$(\text{준 식})=1-\dfrac{\dfrac{-(a-1)}{a(a+1)}}{\dfrac{-(a+1)}{a(a-1)}}=1-\dfrac{(a-1)^2}{(a+1)^2}$$
$$=\dfrac{4a}{(a+1)^2}$$

12. $a+b+c=1$, $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$일 때, 다음 중 옳은 것을 고르면?

① a는 1일 수 없다.

② a, b, c중 꼭 하나만 1이다.

③ a, b, c중 꼭 두 개만 1이다.

④ a, b, c중 적어도 하나는 1이다.

⑤ a, b, c가 모두 1이 될 수는 없다.

해설

$a+b+c=1 \quad \therefore \; a+b+c-1=0 \; \cdots ㉠$

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$, $\quad \frac{ab+bc+ca}{abc}=1$

$\therefore \; abc-ab-bc-ca=0 \; \cdots ㉡$

㉠ + ㉡에서 $abc-ab-bc-ca+a+b+c-1=0$

$1-(a+b+c)+(ab+bc+ca)-abc=0$

$\therefore \; (1-a)(1-b)(1-c)=0$

따라서 a, b, c중 적어도 하나는 1이다.

13. 다음 유리식 $\dfrac{3b-2c}{a} = \dfrac{-a-2c}{-3b} = \dfrac{-a+3b}{2c}$ 을 계산하면?

① 2　② −1, 2　③ −2　④ 1　⑤ −2, 1

해설

$\dfrac{3b-2c}{a} = \dfrac{-a-2c}{-3b} = \dfrac{-a+3b}{2c} = k$라 하자

$\Rightarrow 3b-2c = ak \cdots$ ①

$-a-2c = -3bk \cdots$ ②

$-a+3b = 2ck \cdots$ ③

①, ②, ③을 모두 더하면

$\Rightarrow -2(a+2c-3b) = (a+2c-3b)k$

$k=-2$ 또는 $a+2c-3b=0$

$a+2c-3b=0$, $-2c+3b=+a$이므로 이를 대입하면 $k=1$

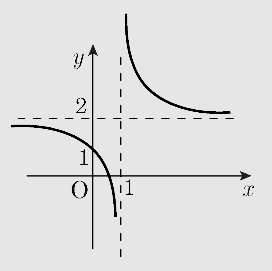
$\therefore \quad k=-2,\ 1$

14. 분수함수 $y = \dfrac{2x-1}{x-1}$ 의 치역이 $\{y \mid y \leq 1\}$ 일 때, 다음 중 정의역을 바르게 구한 것은?

① $\{x \mid 0 < x < 1\}$
② $\{x \mid 0 \leq x < 1\}$
③ $\{x \mid 0 < x \leq 1\}$
④ $\{x \mid 0 \leq x \leq 1\}$
⑤ $\{x \mid -1 \leq x < 1\}$

해설

$y = \dfrac{2x-1}{x-1} = \dfrac{2(x-1)+1}{x-1} = 2 + \dfrac{1}{x-1}$



$y = 1$ 일 때, $1 = \dfrac{2x-1}{x-1}$ 이므로, $x = 0$

정의역은 $\{x \mid 0 \leq x < 1\}$

15. 함수 $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+2}$, $f(g(x))=x$를 만족하는 $g(x)=\dfrac{bx+c}{x+a}$ 일 때, $a+b+c$의 값은?

① -5　② -4　③ -1　④ 1　⑤ 2

해설

$f(g(x))=x$에서

$\therefore\ g(x)=f^{-1}(x)$

$y=\dfrac{2x-1}{x+2}$ 로 놓으면

$y(x+2)=2x-1,\ yx+2y=2x-1$

$yx-2x=-1-2y,\ x(y-2)=-1-2y$

$x=\dfrac{-1-2y}{y-2}$

$\therefore\ f^{-1}(x)=\dfrac{-2x-1}{x-2}=g(x)$

$\dfrac{-2x-1}{x-2}=\dfrac{bx+c}{x+a}$ 에서

$a=-2, b=-2, c=-1$

$\therefore\ a+b+c=-2-2-1=-5$

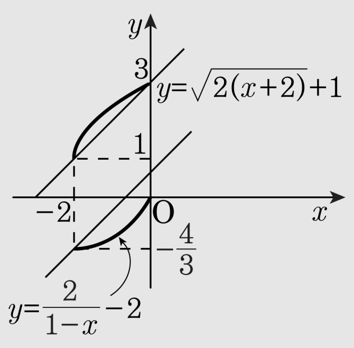
16. 정의역이 $\{x| -2 \le x \le 0\}$ 인 두 함수 $y = \sqrt{2(x+2)}+1$, $y = \dfrac{2}{1-x}-2$ 에 대하여 $y = x+r$ 의 그래프가 $y = \sqrt{2(x+2)}+1$ 의 그래프보다는 아래에 있고 $y = \dfrac{2}{1-x}-2$ 의 그래프 보다는 위에 있을 때, r 은 범위가 $r_1 < r < r_2$ 라고 한다. $3r_1 - r_2$ 의 값을 구하면?

① -1 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$-2 \le x \le 0$ 에서

$y = \sqrt{2(x+2)}+1$ 과 $y = \dfrac{2}{1-x}-2$ 의 그래프를 나타내면 다음 그림과 같다.



이 때, $y = x+r$ 의 그래프가
$y = \sqrt{2(x+2)}+1$ 의 그래프보다
아래에 있으므로 $r < 3$
또한, $y = x+r$ 의 그래프가
$y = \dfrac{2}{1-x}-2$ 의 그래프보다
위에 있으므로 $r > \dfrac{2}{3}$

$\therefore \dfrac{2}{3} < r < 3$

따라서 $r_1 = \dfrac{2}{3}$, $r_2 = 3$ 이므로

$\therefore 3r_1 - r_2 = 3 \cdot \dfrac{2}{3} - 3 = -1$

17. 한 개의 주사위를 던질 때, 짝수의 눈이 나오거나 소수의 눈이 나오는 경우의 수를 구하시오.

▶ 답 : ______ 가지

▷ 정답 : 5 가지

해설

짝수의 눈 : 2, 4, 6 (3 가지)
소수의 눈 : 2, 3, 5 (3 가지)
짝수이면서 소수인 눈 : 2 (1 가지)
따라서 짝수 또는 소수의 눈이 나오는 경우의 수는
$3 + 3 - 1 = 5$ 이다.
$\therefore$ 5 가지

18. 1, 2, 3 으로 만들 수 있는 세 자리의 자연수는 27개가 있다. 이 중에서 다음 규칙을 만족시키는 세 자리의 자연수의 개수를 구하여라.
(가) 1 바로 다음에는 3 이다.
(나) 2 바로 다음에는 1 또는 3 이다.
(다) 3 바로 다음에는 1 , 2 또는 3 이다.

▶ 답 : ______ 가지

▷ 정답 : 13 가지

해설

조건에 맞는 세 자리수는 131, 132, 133, 213, 231, 232, 233, 313, 321, 323, 331, 332 ,333 이므로 13 가지이다.

19. 남학생 4 명, 여학생 2 명이 한 줄로 설 때, 특정한 3 명이 이웃하여 서는 방법의 수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 가지

▷ 정답 : 144 가지

해설

묶음 안에서 특정한 3 명이 자리를 바꾸는 방법은 $3! = 6$(가지)
3 명을 한 묶음으로 생각하여 4 명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $4! = 24$ (가지) 이다.
$\therefore$ 구하는 경우의 수는 $24 \times 6 = 144$ (가지)

20. A, B, C, D 4 명을 일렬로 세울 때, A 가 가장 뒤에 서는 경우의 수를 구하여라.

▶ 답: ______ 가지

▷ 정답: 6 가지

해설
세명을 일렬로 세우는 경우와 같다.
$3! = 6$

21. $1, 2, 3, 4, 5, 6$ 을 한 번씩만 사용하여 만들 수 있는 여섯 자리 자연수 중에서 일의 자리의 수와 백의 자리의 수가 모두 3 의 배수인 자연수의 개수를 구하여라.

▶ 답: ____ 개

▷ 정답: 48 개

해설

일의 자리의 수 a 와 백의 자리의 수 b 는 3 또는 6 이 되어야 하므로
a, b 를 정하는 방법의 수는 $2! = 2$ (가지)
이 때, 나머지 자리의 수는 $1, 2, 4, 5$ 중 어느 하나가 정해지면 되므로
나머지 네 자리의 수를 정하는 방법의 수는 $4! = 24$ (가지)
따라서, 구하는 자연수의 개수는
$2 \times 24 = 48$ (개)

22. 숫자 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 이 적혀 있는 7 개의 카드 중에서 서로 다른 5 개의 카드를 뽑아 나열한다. 이 때, 위의 그림의 예와 같이 첫 번째 카드와 마지막 다섯 번째 카드에 적힌 숫자의 합이 8 이 면서 마지막 다섯 번째 카드에 적힌 숫자가 3 이상이 되도록 나열하는 방법의 수는?

$\boxed{2}$ $\boxed{5}$ $\boxed{7}$ $\boxed{3}$ $\boxed{6}$

① 120 ② 180 ③ 240 ④ 300 ⑤ 360

해설

첫 번째 카드와 마지막 다섯 번째 카드에 적힌 숫자의 합이 8 이면서 마지막 다섯 번째 카드에 적힌 숫자가 3 이상인 경우는 $1-7, 2-6, 3-5, 5-3$ 의 4가지이다.
이 4가지 경우에 대하여 각각 중앙에 남은 세 자리에 5개의 수 중에서
3개를 택하여 나열하는 방법의수는
${}_5P_3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$ (가지)
따라서 구하는 방법의 수는 $4 \times 60 = 240$ (가지)

23. 실수 a 와 양의 정수 k 에 대하여 ${}_{a}C_{k}$ 를 ${}_{a}C_{k} = \dfrac{a(a-1)(a-2)\cdots(a-k+1)}{k(k-1)(k-2)\cdots 2\cdot 1}$ 와 같이 정의할 때, ${}_{-\frac{1}{2}}C_{100} \div {}_{\frac{1}{2}}C_{100}$ 의 값은?

① -199 ② -197 ③ -1 ④ 197 ⑤ 199

해설

$${}_{-\frac{1}{2}}C_{100} \div {}_{\frac{1}{2}}C_{100}$$

$$= \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-98\right)\left(-\frac{1}{2}-99\right)}{100!}$$

$$\div \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-98\right)}{100!}$$

$$= \frac{\left(-\frac{1}{2}-99\right)}{\frac{1}{2}} = -199$$

24. 남학생 4명과 여학생 6명 중에서 4명을 뽑을 때, 남학생과 여학생이 적어도 1명씩 포함되는 경우는 몇 가지인가?

① 105 ② 194 ③ 195 ④ 209 ⑤ 210

해설

전체 경우의 수에서 남학생만 뽑는 경우와 여학생만 뽑게 되는 경우의 수를 뺀다.

${}_{10}C_4 - {}_4C_4 - {}_6C_4 = 194$

25. 십이각형의 서로 다른 대각선의 교점은 최대 몇 개인가?

① 125 ② 175 ③ 275 ④ 385 ⑤ 495

해설

십이각형에서 4 개의 점을 선택하면 대각선이 한 개가 만들어진다. 따라서 대각선의 교점의 최댓값은 십이각형의 12 개의 꼭지점에서 4 개의 점을 선택하는 가지 수와 같다.

$\therefore\ {}_{12}C_4 = 495$