1. $n(A)=26$, $n(B)=17$ 이고, $n(A\cap B)=8$ 일 때, $n(A-B)$ 의 값은?

① 9 ② 11 ③ 18 ④ 25 ⑤ 26

해설

$n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$

$n(A-B)=26-8=18$

2. 집합 $M = \{x \mid |x| < m$인 유리수$\}$ 의 부분집합 A_n 을 $A_n = \left\{ x \in M \;\middle|\; x - [x] = \frac{1}{n},\ n\text{은 } 2\text{ 이상의 자연수} \right\}$ 라고 정의하자. A_n 의 원소의 개수가 30 일 때, 정수 m 의 값은? (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대 정수이다.)

① 13 ② 15 ③ 17 ④ 19 ⑤ 21

해설

집합 A_2 에서 $x - [x] = \frac{1}{2}$ 이므로

$$A_2 = \left\{ \cdots,\ -\frac{5}{2},\ -\frac{3}{2},\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{2},\ \frac{5}{2}, \cdots \right\}$$

집합 A_3 에서 $x - [x] = \frac{1}{3}$ 이므로

$$A_3 = \left\{ \cdots,\ -\frac{8}{3},\ -\frac{5}{3},\ -\frac{2}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{4}{3},\ \frac{7}{3}, \cdots \right\}$$

집합 A_n 에서 $x - [x] = \frac{1}{n}$ 이므로

$$A_n = \left\{ \cdots,\ -2 + \frac{1}{n},\ -1 + \frac{1}{n},\ \frac{1}{n},\ 1 + \frac{1}{n},\ 2 + \frac{1}{n}, \cdots \right\}$$

따라서 A_n 의 원소는 n 의 값에 관계없이 모든 정수 사이에 1 개씩 있으므로 원소의 개수가 30 일 때 $m = 15$

3. 다음 중 명제와 그 역이 <u>모두</u> 참인 것은?

① $xy \geq 0$ 이면 $x \geq 0$ 또는 $y \geq 0$

② $x + y \geq 0$ 이면 $x \geq 0$ 이고 $y \geq 0$

③ $x \geq y$ 이면 $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{y}$

④ $x \leq 2$ 이면 $|x-1| \leq |x-3|$

⑤ $a > 0$ 이고 $b > 0$ 이면 $a^2 + b^2 > 0$

해설

① 거짓 : (반례) $x = -2,\ y = -1$ 일 때,
$xy = 2 \geq 0$ 이지만 $-2 < 0$ 이고 $-1 < 0$ 이다.
② 거짓 : (반례) $x = -2,\ y = 3$ 일 때,
$x + y = -2 + 3 \geq 0$ 이지만 $-2 < 0$ 이고 $3 > 0$ 이다.
③ 거짓 : (반례) $x = 2,\ y = -2$ 일 때,
$2 \geq -2$ 이지만 $\frac{1}{2} > -\frac{1}{2}$ 이다.
④ $|x-1| \leq |x-3|$ 의 양변을 제곱하면
$x^2 - 2x + 1 \leq x^2 - 6x + 9$ 에서 $x \leq 2$ 이므로 원래의 명제와 그 역이 모두 참이다.
⑤ 명제 '$a > 0$ 이고 $b > 0$ 이면 $a^2 + b^2 > 0$' 은 참이지만, 그의 역 '$a^2 + b^2 > 0$ 이면 $a > 0$ 이고 $b > 0$'은 거짓이다.

4. 실수 x에 대하여 다음 명제가 참일 때, a의 최솟값을 구하여라.

$x > a$이면 $\lvert x-2 \rvert > 4$

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

주어진 명제가 참이므로
대우 '$\lvert x-2 \rvert \le 4$ 이면 $x \le a$ 이다.' 가 참이다.
$\lvert x-2 \rvert \le 4$ 에서
$-4 \le x-2 \le 4$, $-2 \le x \le 6$이므로
$\therefore\ a \ge 6$
따라서 a 의 최솟값은 6이다.

5. 네 명의 테니스 선수 정하, 준화, 경진, 선희가 토너먼트 경기를 하였다. 경기를 관람한 세 사람 A, B, C 에게 경기 결과를 물어 보았더니 다음과 같이 대답하였다.

> A : 선희가 1 등, 경진이가 3 등을 했습니다.
> B : 준화가 2 등, 선희가 3 등을 했습니다.
> C : 정하가 1 등, 준화가 4 등을 했습니다.

이들 모두 두 선수의 순위를 대답했지만 그 두 선수의 순위 중 하나는 옳고 하나는 틀리다고 한다. 실제 선수들의 순위를 바르게 나열한 것은?

① 1등 : 경진, 2등 : 준화, 3등 : 정하, 4등 : 선희

② 1등 : 선희, 2등 : 정하, 3등 : 경진, 4등 : 준화

③ 1등 : 정하, 2등 : 준화, 3등 : 경진, 4등 : 선희

④ 1등 : 정하, 2등 : 경진, 3등 : 준화, 4등 : 선희

⑤ 1등 : 정하, 2등 : 준화, 3등 : 선희, 4등 : 경진

해설

만일, 선희가 1등한 것이 참이면 준화가 2등이고 정하가 1등이니 모순이다.
그러면, 경진이가 3등인 것이 참인데, 그렇게 되면 B 의 대답에서 선희가 3등이라는 것이 거짓이므로 준화가 2등이고 준화가 4등인 것이 거짓이므로 정하가 1등이다.
따라서 1등은 정하, 2등은 준화, 3등은 경진, 4등은 선희가 된다.

6. 다음 <보기> 중에서 자연수 전체의 집합 N에서 N으로의 함수가 되는 것을 모두 고르면?

보기

㉠ 자연수 n에 대하여 $\sqrt{n}$을 대응시킨다.

㉡ 자연수 n에 n의 양의 약수의 개수를 대응시킨다.

㉢ 홀수에는 1, 짝수에는 2, 소수에는 3을 대응시킨다.

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉠, ㉡

④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

자연수에서 자연수로의 함수라는 말의 의미는
정의역이 자연수 일 때, 치역도 자연수인 함수를
찾으라는 말이다. 그런데 이때 ㉠은 무리수가
치역에 포함되지 않으므로 정의에 타당하지 않다.
㉢에서 2는 짝수이며 소수이므로 옳지 않다.
따라서 ㉡만 옳다.

7. 두 함수 $f(x) = 2x - 1$, $g(x) = -x + 5$에 대하여 $(f \circ g^{-1})(a) = 1$이 성립할 때 상수 a의 값은 얼마인가?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$(f \circ g^{-1})(a) = 1$에서

$f(g^{-1}(a)) = 1$ $f(1) = 1$이므로

$\therefore g^{-1}(a) = 1$에서 $a = g(1) = 4$

8. 함수 $f(x)=ax+b$ 에 대하여 $f^{-1}(1)=2$, $f(1)=2$ 일 때, $f(3)$ 의 값을 구하여라.

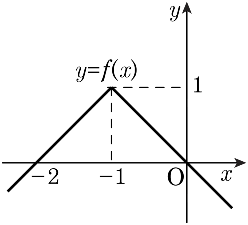
▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$f(2)=2a+b=1,\quad f(1)=a+b=2$
연립하면 $a=-1,\ b=3$
$\therefore\ f(3)=3a+b=0$

9. 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 이 그래프의 관계식을 구하면?



① $y = |x-1| - 1$

② $y = |x+1| - 1$

③ $y = |x-1| + 1$

④ $y = -|x+1| + 1$

⑤ $y = -|x+1| - 1$

해설

주어진 그래프는 함수 $y = -|x|$ 의 그래프를
x 축의 방향으로 -1 만큼,
y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동한 것이므로
$y = -|x|$ 에 x 대신 $x+1$,
y 대신 $y-1$ 을 대입하면 $y-1 = -|x+1|$
즉, $f(x) = -|x+1| + 1$ 이므로 $y = -|x+1| + 1$

10. 함수 $y = |x+1| - |x-3|$ 의 최댓값을 M, 최솟값을 m 이라 할 때, $M - m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$y = |x+1| - |x-3|$ 에서

i) $x < -1$ 일 때

$y = -(x+1) + x - 3 = -4$

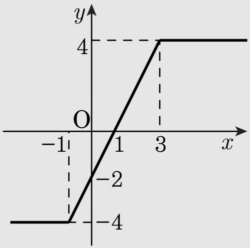
ii) $-1 \le x < 3$ 일 때

$y = x + 1 + x - 3 = 2x - 2$

iii) $x \ge 3$ 일 때

$y = x + 1 - (x-3) = 4$

이상에서 주어진 함수의 그래프가 다음 그림과 같으므로



$M = 4, m = -4$

$\therefore M - m = 4 - (-4)$

$= 8$

11. 번분수식 $1-\dfrac{\dfrac{1}{a}-\dfrac{2}{a+1}}{\dfrac{1}{a}-\dfrac{2}{a-1}}$ 를 간단히 하면?

① $\dfrac{a}{(a+1)^2}$ ② $\dfrac{2a}{(a+1)^2}$ ③ $\dfrac{3a}{(a+1)^2}$

④ $\dfrac{4a}{(a+1)^2}$ ⑤ $\dfrac{5a}{(a+1)^2}$

해설

$$(\text{준 식})=1-\frac{\dfrac{-(a-1)}{a(a+1)}}{\dfrac{-(a+1)}{a(a-1)}}=1-\frac{(a-1)^2}{(a+1)^2}$$

$$=\frac{4a}{(a+1)^2}$$

12. $a+b+c=1$, $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=1$일 때, 다음 중 옳은 것을 고르면?

① a는 1일 수 없다.

② a, b, c중 꼭 하나만 1이다.

③ a, b, c중 꼭 두 개만 1이다.

④ a, b, c중 적어도 하나는 1이다.

⑤ a, b, c가 모두 1이 될 수는 없다.

해설

$a+b+c=1 \quad \therefore\ a+b+c-1=0 \ \cdots$ ㉠

$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=1$, $\quad \dfrac{ab+bc+ca}{abc}=1$

$\therefore\ abc-ab-bc-ca=0 \ \cdots$ ㉡

㉠ + ㉡에서 $abc-ab-bc-ca+a+b+c-1=0$

$1-(a+b+c)+(ab+bc+ca)-abc=0$

$\therefore\ (1-a)(1-b)(1-c)=0$

따라서 a, b, c중 적어도 하나는 1이다.

13. 다음 유리식 $\frac{3b-2c}{a} = \frac{-a-2c}{-3b} = \frac{-a+3b}{2c}$ 을 계산하면?

① 2 ② $-1,\ 2$ ③ -2 ④ 1 ⑤ $-2,\ 1$

해설

$\frac{3b-2c}{a} = \frac{-a-2c}{-3b} = \frac{-a+3b}{2c} = k$ 라 하자

$\Rightarrow 3b-2c = ak \cdots$ ①

$-a-2c = -3bk \cdots$ ②

$-a+3b = 2ck \cdots$ ③

①, ②, ③을 모두 더하면

$\Rightarrow -2(a+2c-3b) = (a+2c-3b)k$

$k=-2$ 또는 $a+2c-3b=0$

$a+2c-3b=0,\ -2c+3b=+a$ 이므로 이를 대입하면 $k=1$

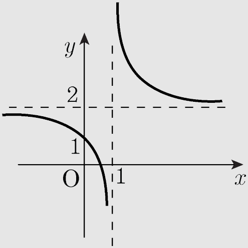
$\therefore\ \ k=-2,\ 1$

14. 분수함수 $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$의 치역이 $\{y \mid y \le 1\}$일 때, 다음 중 정의역을 바르게 구한 것은?

① $\{x \mid 0 < x < 1\}$
② $\{x \mid 0 \le x < 1\}$
③ $\{x \mid 0 < x \le 1\}$
④ $\{x \mid 0 \le x \le 1\}$
⑤ $\{x \mid -1 \le x < 1\}$

해설

$$y=\frac{2x-1}{x-1}=\frac{2(x-1)+1}{x-1}=2+\frac{1}{x-1}$$



$y=1$일 때, $1=\dfrac{2x-1}{x-1}$이므로, $x=0$

정의역은 $\{x \mid 0 \le x < 1\}$

15. 함수 $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+2}$, $f(g(x))=x$를 만족하는 $g(x)=\dfrac{bx+c}{x+a}$일 때, $a+b+c$의 값은?

① -5 ② -4 ③ -1 ④ 1 ⑤ 2

해설

$f(g(x))=x$에서

$\therefore\ g(x)=f^{-1}(x)$

$y=\dfrac{2x-1}{x+2}$로 놓으면

$y(x+2)=2x-1,\ yx+2y=2x-1$

$yx-2x=-1-2y,\ x(y-2)=-1-2y$

$x=\dfrac{-1-2y}{y-2}$

$\therefore\ f^{-1}(x)=\dfrac{-2x-1}{x-2}=g(x)$

$\dfrac{-2x-1}{x-2}=\dfrac{bx+c}{x+a}$에서

$a=-2, b=-2, c=-1$

$\therefore\ a+b+c=-2-2-1=-5$

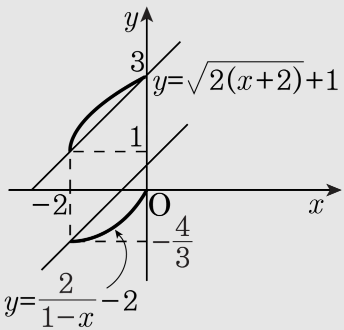
16. 정의역이 $\{x| -2 \le x \le 0\}$ 인 두 함수 $y = \sqrt{2(x+2)}+1$, $y = \dfrac{2}{1-x} - 2$ 에 대하여 $y = x + r$ 의 그래프가 $y = \sqrt{2(x+2)}+1$ 의 그래프보다는 아래에 있고 $y = \dfrac{2}{1-x} - 2$ 의 그래프 보다는 위에 있을 때, r 은 범위가 $r_1 < r < r_2$ 라고 한다. $3r_1 - r_2$ 의 값을 구하면?

① -1　　② 1　　③ 2　　④ 3　　⑤ 4

해설

$-2 \le x \le 0$ 에서

$y = \sqrt{2(x+2)}+1$ 과 $y = \dfrac{2}{1-x} - 2$ 의 그래프를 나타내면 다음 그림과 같다.



이 때, $y = x + r$ 의 그래프가
$y = \sqrt{2(x+2)}+1$ 의 그래프보다
아래에 있으므로 $r < 3$
또한, $y = x + r$ 의 그래프가
$y = \dfrac{2}{1-x} - 2$ 의 그래프보다
위에 있으므로 $r > \dfrac{2}{3}$

$\therefore \dfrac{2}{3} < r < 3$

따라서 $r_1 = \dfrac{2}{3}$, $r_2 = 3$ 이므로

$\therefore 3r_1 - r_2 = 3 \cdot \dfrac{2}{3} - 3 = -1$

17. 한 개의 주사위를 던질 때, 짝수의 눈이 나오거나 소수의 눈이 나오는 경우의 수를 구하시오.

▶ 답 : ______ 가지

▷ 정답 : 5 가지

해설

짝수의 눈 : $2, 4, 6$ (3 가지)
소수의 눈 : $2, 3, 5$ (3 가지)
짝수이면서 소수인 눈 : 2 (1 가지)
따라서 짝수 또는 소수의 눈이 나오는 경우의 수는
$3 + 3 - 1 = 5$ 이다.
$\therefore 5$ 가지

18. $1, 2, 3$ 으로 만들 수 있는 세 자리의 자연수는 27개가 있다. 이 중에서 다음 규칙을 만족시키는 세 자리의 자연수의 개수를 구하여라.

㈎ 1 바로 다음에는 3 이다.

㈏ 2 바로 다음에는 1 또는 3 이다.

㈐ 3 바로 다음에는 1 , 2 또는 3 이다.

▶ 답 : ______ 가지

▷ 정답 : 13 가지

해설

조건에 맞는 세 자리수는 131, 132, 133, 213, 231, 232, 233, 313, 321, 323, 331, 332 ,333 이므로 13 가지이다.

19. 남학생 4 명, 여학생 2 명이 한 줄로 설 때, 특정한 3 명이 이웃하여 서는 방법의 수를 구하여라.

▶ **답 :** ______ 가지

▷ **정답 :** 144 가지

해설

묶음 안에서 특정한 3 명이 자리를 바꾸는 방법은 $3! = 6$(가지)
3 명을 한 묶음으로 생각하여 4 명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $4! = 24$ (가지) 이다.
$\therefore$ 구하는 경우의 수는 $24 \times 6 = 144$ (가지)

20. A, B, C, D 4 명을 일렬로 세울 때, A 가 가장 뒤에 서는 경우의 수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 가지

▷ 정답 : 6 가지

해설

세명을 일렬로 세우는 경우와 같다.

$3! = 6$

21. $1, 2, 3, 4, 5, 6$ 을 한 번씩만 사용하여 만들 수 있는 여섯 자리 자연수 중에서 일의 자리의 수와 백의 자리의 수가 모두 3 의 배수인 자연수의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 48 개

해설

일의 자리의 수 a 와 백의 자리의 수 b 는 3 또는 6 이 되어야 하므로

a, b 를 정하는 방법의 수는 $2! = 2$ (가지)

이 때, 나머지 자리의 수는 $1, 2, 4, 5$ 중 어느 하나가 정해지면 되므로

나머지 네 자리의 수를 정하는 방법의 수는 $4! = 24$ (가지)

따라서, 구하는 자연수의 개수는

$2 \times 24 = 48$ (개)

22. 숫자 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 이 적혀 있는 7 개의 카드 중에서 서로 다른 5 개의 카드를 뽑아 나열한다. 이 때, 위의 그림의 예와 같이 첫 번째 카드와 마지막 다섯 번째 카드에 적힌 숫자의 합이 8 이 면서 마지막 다섯 번째 카드에 적힌 숫자가 3 이상이 되도록 나열하는 방법의 수는?

① 120 ② 180 ③ 240 ④ 300 ⑤ 360

해설

첫 번째 카드와 마지막 다섯 번째 카드에 적힌 숫자의 합이 8 이면서 마지막 다섯 번째 카드에 적힌 숫자가 3 이상인 경우는 $1-7, 2-6, 3-5, 5-3$ 의 4가지이다.

이 4가지 경우에 대하여 각각 중앙에 남은 세 자리에 5개의 수 중에서

3개를 택하여 나열하는 방법의수는

${}_5P_3 = 5\times4\times3 = 60$ (가지)

따라서 구하는 방법의 수는 $4\times60 = 240$ (가지)

23. 실수 a 와 양의 정수 k 에 대하여 ${}_aC_k$ 를 ${}_aC_k = \dfrac{a(a-1)(a-2)\cdots(a-k+1)}{k(k-1)(k-2)\cdots 2\cdot 1}$ 와 같이 정의할 때, ${}_{-\frac{1}{2}}C_{100} \div {}_{\frac{1}{2}}C_{100}$ 의 값은?

① -199 ② -197 ③ -1 ④ 197 ⑤ 199

해설

${}_{-\frac{1}{2}}C_{100} \div {}_{\frac{1}{2}}C_{100}$

$$= \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-98\right)\left(-\frac{1}{2}-99\right)}{100!}$$

$$\div \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-98\right)}{100!}$$

$$= \frac{\left(-\frac{1}{2}-99\right)}{\frac{1}{2}} = -199$$

24. 남학생 4명과 여학생 6명 중에서 4명을 뽑을 때, 남학생과 여학생이 적어도 1명씩 포함되는 경우는 몇 가지인가?

① 105 ② 194 ③ 195 ④ 209 ⑤ 210

해설

전체 경우의 수에서 남학생만 뽑는 경우와 여학생만 뽑게 되는 경우의 수를 뺀다.

$${}_{10}C_4 - {}_4C_4 - {}_6C_4 = 194$$

25. 십이각형의 서로 다른 대각선의 교점은 최대 몇 개인가?

① 125 ② 175 ③ 275 ④ 385 ⑤ 495

해설

십이각형에서 4개의 점을 선택하면 대각선이 한 개가 만들어진다. 따라서 대각선의 교점의 최댓값은 십이각형의 12 개의 꼭지점에서 4 개의 점을 선택하는 가지 수와 같다.

$\therefore\ {}_{12}C_4 = 495$