

1. 등식 $\frac{a}{1+i} + \frac{b}{1-i} = -5$ 를 만족하는 두 실수 $a+b$ 의 값을 구하시오
(단, $i = \sqrt{-1}$)

▶ 답 :

▷ 정답 : -10

해설

주어진 식의 양변에 $(1+i)(1-i)$ 를 곱하면

$$a(1-i) + b(1+i) = -10, (a+b) + (b-a)i = -10$$

$$\therefore a+b = -10, b-a = 0$$

2. 복소수 $(1+i)x^2 - (1-4i)x - (2-3i)$ 가 실수일 때의 x 값과 순허수일 때의 x 값을 모두 곱한 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

준식을 전개하여 실수부와 허수부로 정리하면

$$(x^2 - x - 2) + (x^2 + 4x + 3)i$$

실수가 되기 위해서는 $x^2 + 4x + 3 = 0$

$$(x+1)(x+3) = 0 \therefore x = -3, -1$$

순허수가 되기 위해서는

$$x^2 - x - 2 = 0 \text{ 이고 } x^2 + 4x + 3 \neq 0$$

$$x = -1, 2 \text{ 이고 } x \neq -3, -1 \therefore x = 2$$

$$(-3) \times (-1) \times 2 = 6$$

3. $a = \frac{1+i}{1-i}$ 일 때, $a + a^2 + a^3 + \dots + a^{100}$ 의 값을 구하면?

① i

② $-i$

③ -1

④ 1

⑤ 0

해설

$$a = \frac{1+i}{1-i} = i$$

$$a + a^2 + a^3 + a^4 = i - 1 - i + 1 = 0 \text{ 이고}$$

$$\therefore (a + a^2 + a^3 + a^4) + \dots + (a^{97} + a^{98} + a^{99} + a^{100}) = 0$$

4. 다음 중 $(2+3i)z + (2-3i)\bar{z} = 2$ 를 만족하는 복소수 z 의 개수는? (단, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수)

① 없다.

② 1 개

③ 2 개

④ 3 개

⑤ 무수히 많다.

해설

$z = a + bi$ 로 놓으면 $\bar{z} = a - bi$ (단, a, b 는 실수)이므로 주어진 식에 대입하면

$$(2+3i)(a+bi) + (2-3i)(a-bi) = 2$$

$$(2a-3b) + (3a+2b)i + (2a-3b) - (3a+2b)i = 2$$

$$2(2a-3b) = 2$$

$$\therefore 2a-3b = 1$$

따라서 $2a-3b=1$ 을 만족하는 a, b 는 무수히 많고, $z = a + bi$ 이므로 문제의 조건을 만족하는 z 가 무수히 많음을 알 수 있다.

5. $\alpha = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$ 일 때, $\alpha^3 + 2\alpha^2 + 2\alpha + 5$ 의 값을 구하면?

① 3

② 4

③ 5

④ 6

⑤ 7

해설

$$\alpha = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$$

$$2\alpha = -1 + \sqrt{3}i$$

$$2\alpha + 1 = \sqrt{3}i$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$$

$$\alpha^3 + 2\alpha^2 + 2\alpha + 5$$

$$= \alpha(\alpha^2 + \alpha + 1) + (\alpha^2 + \alpha + 1) + 4$$

$$= 4$$

해설

$\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$ 을 얻은 후 $\alpha^3 + 2\alpha^2 + 2\alpha + 5$ 를 $\alpha^2 + \alpha + 1$ 로 나누면

$$\alpha^3 + 2\alpha^2 + 2\alpha + 5$$

$$= (\alpha^2 + \alpha + 1)(\alpha + 1) + 4$$

$$= 4 (\because \alpha^2 + \alpha + 1 = 0)$$