

1. 길이가 6인 선분을 같은 방향으로 2:1로 내분하는 점과 외분하는 점 사이의 거리를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

길이가 6인 선분을 OA라 하고,
O를 원점으로 잡으면 A의 좌표는 (6, 0)
이 선분을 2:1로 내분하는 점 P(x_1)라 하면

$$x_1 = \frac{2 \times 6 + 1 \times 0}{2 + 1} = 4$$

2:1로 외분하는 점 Q(x_2)라 하면

$$x_2 = \frac{2 \times 6 - 1 \times 0}{2 - 1} = 12$$

따라서 $PQ = 12 - 4 = 8$

2. 두 다항식의 최대공약수가 $x - 1$ 이고, 곱이 $2x^3 + ax^2 + bx + 3$ 일 때, $a - b$ 의 값은?(단, a, b 는 상수)

- ① -3 ② 3 ③ -1 ④ 1 ⑤ 0

해설

두 다항식은 $(x - 1)p, (x - 1)q$ (p, q 은 서로 소)라 할 수 있다.
두 다항식의 곱은 $(x - 1)^2 pq = 2x^3 + ax^2 + bx + 3$
즉, $2x^3 + ax^2 + bx + 3$ 는 $x - 1$ 로 나눌 때 연속으로 나누어 떨어진다.
조립제법을 사용하면

1		2	a	b	3
		2	$a+2$	$a+b+2$	
1		2	$a+2$	$a+b+2$	$a+b+5=0$
		2	$a+4$		
		2	$a+4$	$a+b+6=0$	

$a + b = -5, 2a + b = -6$ 을 연립하여 풀면
 $a = -1, b = -4$
 $\therefore a - b = 3$

해설

$(x - 1)^2(2x + k) = 2x^3 + ax^2 + bx + 3$
 $(x^2 - 2x + 1)(2x + k) = 2x^3 + ax^2 + bx + 3$
상수항을 비교하면 $k = 3$
이차항의 계수를 비교하면 $3x^2 - 4x^2 = ax^2$
 $\therefore a = -1$
일차항의 계수를 비교하면
 $-6x + 2x = bx \therefore b = -4$
 $\therefore a - b = 3$

3. 이차함수 $y = -2x^2 + bx + c$ 가 $x = 2$ 에서 최댓값 5를 가질 때, 상수 b, c 의 값을 각각 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $b = 8$

▷ 정답 : $c = -3$

해설

꼭짓점의 좌표가 (2, 5) 이므로 이차함수의 식은 $y = -2(x-2)^2+5$ 이다.

$y = -2(x-2)^2 + 5$ 을 전개하면 $y = -2x^2 + 8x - 3$ 이므로 $b = 8, c = -3$ 이다.

4. $x + \frac{1}{x} = 1$ 일 때, $x^3 + 5x + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^3}$ 의 값을 구하면?

- ① $\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{3}i)$ ② $\frac{3}{2}(1 \pm \sqrt{3}i)$ ③ $\frac{5}{2}(2 \pm \sqrt{3}i)$
④ $\frac{7}{2}(3 \pm \sqrt{3}i)$ ⑤ $\frac{9}{2}(4 \pm \sqrt{3}i)$

해설

$$x + \frac{1}{x} = 1 \Rightarrow x^2 - x + 1 = 0 \therefore x = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= x^3 + \frac{1}{x^3} + 2\left(x + \frac{1}{x}\right) + 3x \\&= \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - \left(x + \frac{1}{x}\right) + 3x \\&= 3x \\&= \frac{3}{2}(1 \pm \sqrt{3}i)\end{aligned}$$

5. 원점에서 직선 $(a-1)x + (a+3)y - 4 = 0$ 에 이르는 거리를 $f(a)$ 라 할 때, $f(a)$ 의 최댓값은? (단, a 는 상수)

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ 2 ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 4

해설

$$f(a) = \frac{|-4|}{\sqrt{(a-1)^2 + (a+3)^2}}$$
$$= \frac{4}{\sqrt{2a^2 + 4a + 10}}$$

이 때, $f(a)$ 의 값이 최대가 되려면 분모가 최소이어야 한다.

$$2a^2 + 4a + 10 = 2(a^2 + 2a) + 10 = 2(a+1)^2 + 8$$

즉, 분모의 최솟값은 $\sqrt{8}$ 이므로

$$f(a) \text{ 의 최댓값은 } \therefore \frac{4}{\sqrt{8}} = \sqrt{2}$$