

1. 길이가 6인 선분을 같은 방향으로 2 : 1로 내분하는 점과 외분하는 점 사이의 거리를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

길이가 6인 선분을 OA라 하고,
O를 원점으로 잡으면 A의 좌표는 (6, 0)
이 선분을 2 : 1로 내분하는 점 $P(x_1)$ 라 하면

$$x_1 = \frac{2 \times 6 + 1 \times 0}{2 + 1} = 4$$

2 : 1로 외분하는 점 $Q(x_2)$ 라 하면

$$x_2 = \frac{2 \times 6 - 1 \times 0}{2 - 1} = 12$$

따라서 $\overline{PQ} = 12 - 4 = 8$

2. 두 다항식의 최대공약수가 $x-1$ 이고, 곱이 $2x^3 + ax^2 + bx + 3$ 일 때, $a-b$ 의 값은?(단, a, b 는 상수)

① -3

② 3

③ -1

④ 1

⑤ 0

해설

두 다항식은 $(x-1)p, (x-1)q$ (p, q 은 서로 소)라 할 수 있다.

두 다항식의 곱은 $(x-1)^2 pq = 2x^3 + ax^2 + bx + 3$

즉, $2x^3 + ax^2 + bx + 3$ 는 $x-1$ 로 나눌 때 연속으로 나누어 떨어진다.

조립제법을 사용하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 2 & a & b & 3 \\ & & 2 & a+2 & a+b+2 \\ \hline 1 & 2 & a+2 & a+b+2 & a+b+5=0 \\ & & 2 & a+4 & \\ \hline & 2 & a+4 & a+b+6=0 \end{array}$$

$a+b=-5, 2a+b=-6$ 을 연립하여 풀면

$$a=-1, b=-4$$

$$\therefore a-b=3$$

해설

$$(x-1)^2(2x+k) = 2x^3 + ax^2 + bx + 3$$

$$(x^2 - 2x + 1)(2x+k) = 2x^3 + ax^2 + bx + 3$$

상수항을 비교하면 $k=3$

$$\text{일차항의 계수를 비교하면 } 3x^2 - 4x^2 = ax^2$$

$$\therefore a=-1$$

일차항의 계수를 비교하면

$$-6x + 2x = bx \therefore b=-4$$

$$\therefore a-b=3$$

3. 이차함수 $y = -2x^2 + bx + c$ 가 $x = 2$ 에서 최댓값 5를 가질 때, 상수 b, c 의 값을 각각 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $b = 8$

▷ 정답 : $c = -3$

해설

꼭짓점의 좌표가 $(2, 5)$ 이므로 이차함수의 식은 $y = -2(x-2)^2 + 5$ 이다.

$y = -2(x-2)^2 + 5$ 을 전개하면 $y = -2x^2 + 8x - 3$ 이므로 $b = 8, c = -3$ 이다.

4. $x + \frac{1}{x} = 1$ 일 때, $x^3 + 5x + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^3}$ 의 값을 구하면?

① $\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{3}i)$

② $\frac{3}{2}(1 \pm \sqrt{3}i)$

③ $\frac{5}{2}(2 \pm \sqrt{3}i)$

④ $\frac{7}{2}(3 \pm \sqrt{3}i)$

⑤ $\frac{9}{2}(4 \pm \sqrt{3}i)$

해설

$$x + \frac{1}{x} = 1 \Rightarrow x^2 - x + 1 = 0 \therefore x = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= x^3 + \frac{1}{x^3} + 2\left(x + \frac{1}{x}\right) + 3x \\&= \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - \left(x + \frac{1}{x}\right) + 3x \\&= 3x \\&= \frac{3}{2}(1 \pm \sqrt{3}i)\end{aligned}$$

5. 원점에서 직선 $(a-1)x + (a+3)y - 4 = 0$ 에 이르는 거리를 $f(a)$ 라 할 때, $f(a)$ 의 최댓값은? (단, a 는 상수)

① 1

② $\sqrt{2}$

③ 2

④ $2\sqrt{2}$

⑤ 4

해설

$$\begin{aligned} f(a) &= \frac{|-4|}{\sqrt{(a-1)^2 + (a+3)^2}} \\ &= \frac{4}{\sqrt{2a^2 + 4a + 10}} \end{aligned}$$

이 때, $f(a)$ 의 값이 최대가 되려면 분모가 최소이어야 한다.

$$2a^2 + 4a + 10 = 2(a^2 + 2a) + 10 = 2(a+1)^2 + 8$$

즉, 분모의 최솟값은 $\sqrt{8}$ 이므로

$$f(a) \text{ 의 최댓값은 } \therefore \frac{4}{\sqrt{8}} = \sqrt{2}$$