

1. 직선 $ax + by + c = 0$ 은 $ab > 0$, $bc < 0$ 일 때, 몇 사분면을 지나지 않는가?

- ① 제 1 사분면
- ② 제 2 사분면
- ③ 제 3 사분면
- ④ 제 4 사분면
- ⑤ 제 1 사분면, 제 2 사분면

해설

$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ 에서
 $-\frac{a}{b} < 0$ ($\because ab > 0$)
 $-\frac{c}{b} > 0$ ($\because bc < 0$)이므로
제 1 사분면, 제 2 사분면, 제 4 사분면을 지난다.

2. 직선 $x+ay+3=0$ 이 $2x-3y-5=0$ 에 평행하도록 상수 a 의 값은?

- ① $\frac{3}{2}$ ② $-\frac{3}{2}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $-\frac{2}{3}$ ⑤ $-\frac{3}{4}$

해설

두 직선 $x+ay+3=0$, $2x-3y-5=0$ 이 평행

$$\frac{2}{1} = \frac{-3}{a} \neq \frac{-5}{3}, \text{ 즉 } \frac{2}{1} = \frac{-3}{a}$$

$$\therefore a = -\frac{3}{2}$$

3. 두 점 $(2, -1)$, $(4, 3)$ 을 지나는 직선과 원점 사이의 거리는 ?

- ① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ 2 ⑤ $\sqrt{5}$

해설

두 점 $(2, -1)$, $(4, 3)$ 을 지나는 직선은

$$y + 1 = \frac{3 - (-1)}{4 - 2}(x - 2)$$

$$\therefore 2x - y - 5 = 0$$

원점에서 이 직선까지의 거리는

$$\frac{|2 \times 0 - 0 - 5|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

4. 직선 $(a+2)x - y - a + b = 0$ 이 x 축의 양의 방향과 45° 의 각을 이루고 y 절편이 4 일 때, $a+b$ 의 값을 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$y = (a+2)x - a + b$ 에서
기울기 $= a+2 = \tan 45^\circ = 1$
 $\therefore a = -1$
 y 절편 $-a + b = 4$
 $\therefore b = 3$
 $\therefore a + b = 2$

5. 두 점 $(4, -2), (2, -3)$ 을 지나는 직선의 x 절편을 A, y 절편을 B, 원점을 O라 할 때, $\triangle OAB$ 의 면적을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 16

해설

$(4, -2), (2, -3)$ 를 지나는 직선은

$$y = \frac{-2 - (-3)}{4 - 2}(x - 2) - 3 = \frac{1}{2}x - 4$$

$\Rightarrow x$ 절편은 8이고, y 절편은 -4 이다.

$\therefore \triangle OAB$ 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 8 \times 4 = 16 \text{ 이다.}$$

6. 어떤 시험 결과, 최저점은 25점, 최고점은 160점이었다. 이 점수를 환산식 $y = ax + b$ 에 의하여 최저점을 10점, 최고점을 100점으로 고치려고 한다. 처음의 100점은 나중의 몇 점으로 환산되겠는가?

- ① 30 ② 40 ③ 50 ④ 60 ⑤ 70

해설

$25a + b = 10$, $160a + b = 100$ 이므로 두 식을 연립한다.

$$\Rightarrow a = \frac{2}{3} \quad b = -\frac{20}{3}$$

$$\therefore 100 \text{ 점을 환산하면, } \frac{2}{3} \times 100 - \frac{20}{3} = 60$$

7. 양 끝점의 좌표가 A(3,17), B(48,281)인 선분 AB 위의 점 중에서 x 좌표와 y 좌표가 모두 정수인 점의 개수는?

- ① 2 개 ② 4 개 ③ 15 개 ④ 16 개 ⑤ 46 개

해설

선분 AB의 방정식은

$$y = \frac{88}{15}(x-3) + 17$$

$$3 \leq x \leq 48$$

이때, y가 정수이려면,

x-3이 15의 배수이어야 한다.

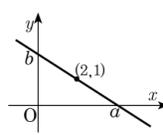
따라서 x = 3, 18, 33, 48로 모두 4개이다.

문제의 조건을 만족시키는 점의 좌표는

(3, 17), (18, 105), (33, 193), (48, 281)로 모두 4개

8. 다음 그림에서 a 와 b 사이의 관계식을 나타내면?

- ① $a + \frac{a}{2} = 1$ ② $\frac{2}{a} + \frac{1}{b} = 1$
③ $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} = 1$ ④ $\frac{2}{a} + b = 1$
⑤ $\frac{1}{2a} + \frac{1}{b} = 1$



해설

x 절편이 a , y 절편이 b 인 직선의 방정식은

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \text{ 이다.}$$

따라서 $(2, 1)$ 을 지나므로

$$\frac{2}{a} + \frac{1}{b} = 1 \text{ 이다.}$$

9. 직선 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 2$ 와 x 축 및 y 축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이가 12일 때, ab 의 값은? (단, $a > 0, b > 0$)

- ① 3 ② 4 ③ 6 ④ 12 ⑤ 24

해설

직선 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 2$ 에서 $\frac{x}{2a} + \frac{y}{2b} = 1$ 이므로 x

절편은 $2a$, y 절편은 $2b$ 이다.

이 때, a, b 가 양수이므로

직선 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 2$ 와 x 축 및 y 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 2a \times 2b = 2ab = 12$$

$$\therefore ab = 6$$

10. 두 점 $(-1, 2), (3, 4)$ 를 지나는 직선이 x 축, y 축과 각각 점 A, B 에서 만날 때, 삼각형 OAB 의 넓이는? (단 O 는 원점)

- ① $\frac{21}{4}$ ② $\frac{13}{3}$ ③ $\frac{25}{4}$ ④ $\frac{24}{5}$ ⑤ $\frac{37}{6}$

해설

두 점 $(-1, 2), (3, 4)$ 를 지나는 직선의 방정식은 $y - 4 =$

$$\frac{4-2}{3-(-1)}(x-3)$$

$$\therefore y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

$y = 0$ 을 대입하면

$$0 = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}, x = -5$$

따라서 x 축과 만나는 점 A 의 좌표는 $A(-5, 0)$

①의 y 절편이 $\frac{5}{2}$ 이므로

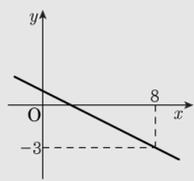
y 축과 만나는 점 B 의 좌표는 $B(0, \frac{5}{2})$,

$$\Delta OAB = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{5}{2} = \frac{25}{4}$$

11. 점 $(8, -3)$ 을 지나고, x 축, y 축의 양의 부분으로 둘러싸인 삼각형의 넓이가 1인 직선의 방정식으로 알맞은 것은?

- ① $\frac{x}{2} + \frac{y}{2} = 1$ ② $\frac{x}{2} + y = 1$ ③ $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$
 ④ $x + \frac{y}{3} = 1$ ⑤ $\frac{x}{3} + \frac{y}{3} = 1$

해설



x 절편이 a 이고, y 절편이 b 인 직선의 방정식은 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

이 직선이 점 $(8, -3)$ 을 지나므로

$$\frac{8}{a} + \frac{(-3)}{b} = 1 \cdots \text{㉠}$$

두 좌표축과 직선이 이루는 삼각형의 넓이 S 는

$$S = \frac{1}{2}ab = 1 \cdots \text{㉡}$$

$$\text{㉡에서 } \frac{1}{a} = \frac{1}{2}b$$

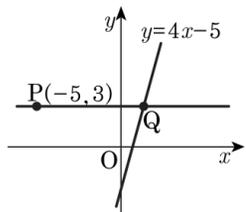
이것을 ㉠에 대입하면 $8 \times \frac{1}{2}b - \frac{3}{b} = 1$ 에서

$$4b^2 - b - 3 = 0 \quad \therefore (4b + 3)(b - 1) = 0$$

$$b > 0 \text{이므로 } b = 1 \quad \therefore a = 2$$

따라서 구하는 직선의 방정식은 $\frac{x}{2} + y = 1$

12. 다음 그림과 같이 좌표평면 위의 점 $P(-5, 3)$ 을 지나고 x 축에 평행한 직선이 일차함수 $y = 4x - 5$ 의 그래프와 만나는 점을 Q 라 한다. \overline{PQ} 의 길이는?



- ① 6 ② $\frac{13}{2}$ ③ 7 ④ $\frac{15}{2}$ ⑤ 8

해설

점 P 를 지나고 x 축에 평행한 직선의 방정식은 $y = 3$ 이다.
점 Q 의 y 좌표가 3이므로
 $y = 4x - 5$ 에 $y = 3$ 을 대입하면 $3 = 4x - 5$
 $\therefore x = 2$
따라서 점 Q 의 좌표는 $(2, 3)$ 이다.
 $\therefore \overline{PQ} = 2 - (-5) = 7$

13. 좌표평면 위에 서로 다른 세 점 $A(-2k-1, 5)$, $B(k, -k-10)$, $C(2k+5, k-1)$ 가 일직선 위에 있을 때, k 의 값의 곱을 구하면?

▶ 답:

▷ 정답: 12

해설

세 점 A, B, C가 일직선 위에 있으므로
직선 AB와 직선 BC의 기울기는 같다.

$$\frac{-k-10-5}{k-(-2k-1)} = \frac{(k-1)-(-k-10)}{2k+5-k}$$

이 식을 정리하면 $k^2 + 7k + 12 = 0$
∴ k 의 값의 곱은 12이다.

14. $ab < 0$, $bc < 0$ 일 때, 직선 $ax + by + c = 0$ 이 지나지 않는 사분면을 구하면?

- ① 제1 사분면 ② 제2, 3 사분면 ③ 제4 사분면
④ 제3 사분면 ⑤ 제3, 4 사분면

해설

$$ax + by + c = 0 \Rightarrow y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

$ab < 0$, $bc < 0$ 이므로 기울기는 양수, y 절편은 양수이다.

\therefore 제4분면은 지나지 않는다.

15. 상수 a, b, c 가 조건 $ab > 0, bc < 0$ 을 만족시킬 때 방정식 $ax+by-c = 0$ 이 나타내는 그래프가 지나는 사분면을 모두 고르면?

- ① 제 1, 2, 3 사분면 ② 제 2, 3, 4 사분면
③ 제 1, 3, 4 사분면 ④ 제 1, 2 사분면
⑤ 제 2, 3 사분면

해설

$$ax + by - c = 0 \Rightarrow y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$$

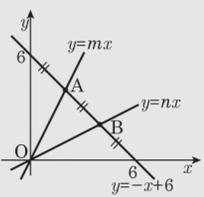
$ab > 0, bc < 0$ 이므로
기울기는 (-), y절편은 (-)이다.
 \therefore 제 2, 3, 4 사분면을 지난다.

16. 직선 $x + y - 6 = 0$ 과 x 축, y 축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 두 직선 $y = mx$, $y = nx$ 에 의하여 삼등분 될 때, $m + n$ 의 값은?

- ① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 4

해설

다음 그림과 같이 직선 $y = -x + 6$ 과 두 직선 $y = mx$, $y = nx$ 의 교점을 각각 A, B라 하면 두 점 (6, 0), (0, 6)을 잇는 선분을 2 : 1로 내분하는 점이 A이고, 1 : 2로 내분하는 점이 B이다. 이 때, 두 점 A, B의 좌표는



$$A \left(\frac{2 \cdot 0 + 1 \cdot 6}{2 + 1}, \frac{2 \cdot 6 + 1 \cdot 0}{2 + 1} \right),$$

$$B \left(\frac{1 \cdot 0 + 2 \cdot 6}{1 + 2}, \frac{1 \cdot 6 + 2 \cdot 0}{1 + 2} \right)$$

$$\therefore A(2, 4), B(4, 2)$$

따라서, 직선 $y = mx$ 는 점 (2, 4)를 지나고,

직선 $y = nx$ 는 점 (4, 2)를 지나므로

$$m = 2, n = \frac{1}{2}$$

$$\therefore m + n = \frac{5}{2}$$

17. x, y 에 관한 이차방정식 $2x^2 - 3xy + ay^2 - 2x + 9y + b = 0$ 이 직교하는 두 직선의 곱을 나타낼 때, ab 를 구하면?

- ① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

준식이 나타내는 두 직선을
 $px + qy + r = 0 \cdots \textcircled{1}$,
 $p'x + q'y + r' = 0 \cdots \textcircled{2}$ 이라 하자.
 $\textcircled{1}$ 과 $\textcircled{2}$ 은 서로 직교하므로
 $pp' + qq' = 0$ 이다.
(준식) $= (px + qy + r)(p'x + q'y + r') = 0$ 의
전개식에서 x^2 의 계수와 y^2 의 계수의 합은
 $pp' + qq' = 0$ 이므로 $a + 2 = pp' + qq' = 0$
 $\therefore a = -2$
 $a = -2$ 를 준식에 대입하여 정리하면
(준식)
 $= 2x^2 - (3y + 2)x + (-2y^2 + 9y + b) = 0 \cdots \textcircled{3}$
 $\textcircled{3}$ 이 두 직선의 곱을 나타내므로
 $\textcircled{3}$ 의 판별식 $D_1 = (3y + 2)^2 - 8(-2y^2 + 9y + b)$
 $= 25y^2 - 60y + (4 - 8b) \cdots \textcircled{4}$ 이 완전제곱식이다.
따라서 $\textcircled{4}$ 의 판별식 $\frac{D_2}{4}$ 는 0이다.
 $\frac{D_2}{4} = 30^2 - 25(4 - 8b) = 0$
 $\therefore b = -4$
 $\therefore ab = (-2) \cdot (-4) = 8$

18. 직선 $ax + y - 1 = 0$ 이 직선 $2x + by - 5 = 0$ 에 평행하고, 직선 $x + (a-1)y - 3 = 0$ 에 수직일 때, $2a + b$ 의 값은?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

두 직선이 평행하면 기울기가 일치한다.

$$\Rightarrow -a = -\frac{2}{b} \dots \textcircled{A}$$

두 직선이 수직하면 기울기의 곱이 -1 이다.

$$\Rightarrow -a \times -\frac{1}{(a-1)} = -1 \dots \textcircled{B}$$

$$\therefore \textcircled{A}, \textcircled{B} \text{ 를 연립하면, } a = \frac{1}{2} \quad b = 4$$

$$\therefore 2a + b = 5$$

19. 두 직선 $2x + 3y = 3$, $3x - 2y = -2$ 의 교점을 지나고, 한 점 $(-1, 2)$ 를 지나는 직선의 방정식은?

- ① $x + y + 1 = 0$ ② $x + y - 1 = 0$ ③ $2x + y - 1 = 0$
④ $2x + y + 1 = 0$ ⑤ $3x + y - 1 = 0$

해설

두 직선 $ax + by + c = 0$ 과 $a'x + b'y + c' = 0$ 의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$ax + by + c + k(a'x + b'y + c') = 0$$

두 직선 $2x + 3y = 3$ 과 $3x - 2y = -2$ 의

교점을 지나는 직선의 방정식은

$$2x + 3y - 3 + k(3x - 2y + 2) = 0 \text{ 이고}$$

이 직선이 점 $(-1, 2)$ 를 지나므로

대입하여 k 값을 구하면 $k = \frac{1}{5}$ 이다.

$$\text{따라서 } 2x + 3y - 3 + \frac{1}{5}(3x - 2y + 2) = 0$$

$$\therefore x + y - 1 = 0$$

20. 좌표평면 위의 세 점 $O(0, 0)$, $A(4, 3)$, $B(2, 6)$ 을 꼭지점으로 하는 삼각형 OAB 의 무게중심을 G 라 할 때, 점 G 와 직선 OA 사이의 거리는?

- ① $\frac{4}{5}$ ② 1 ③ $\frac{6}{5}$ ④ $\frac{7}{5}$ ⑤ $\frac{8}{5}$

해설

삼각형 OAB 의 무게중심은 $G(2, 3)$, 직선 OA 의 방정식은 $y = \frac{3}{4}x$ 곧 $3x - 4y = 0$ 이다.

따라서 점 G 와 직선 OA 의 거리 d 는

$$d = \frac{|3 \cdot 2 - 4 \cdot 3|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{6}{5}$$

21. $x+2y-3=0$, $2x-y-1=0$ 에 이르는 거리가 같은 x 축 위의 점의 좌표를 구하면?

- ① $(-2, 0)$, $(\frac{4}{3}, 0)$ ② $(-2, 0)$, $(2, 0)$
③ $(0, -2)$, $(0, \frac{4}{3})$ ④ $(0, -2)$, $(0, 2)$
⑤ $(-2, 0)$, $(0, 0)$

해설

x 축 위의 점을 $(\alpha, 0)$ 이라 하자.
점과 직선 사이의 거리 구하는 공식을 이용하면,

$$\frac{|\alpha - 3|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{|2\alpha - 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2}}$$

$$\Rightarrow |\alpha - 3| = |2\alpha - 1|$$

$$\Rightarrow (\alpha - 3)^2 = (2\alpha - 1)^2$$

$$\Rightarrow 3\alpha^2 + 2\alpha - 8 = 0$$

$$\alpha = \frac{4}{3} \text{ 또는 } -2$$

$$\therefore \left(\frac{4}{3}, 0\right), (-2, 0)$$

22. 두 직선 $3x + 4y = 24$ 와 $3x + 4y = 4$ 사이의 거리를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 4

해설

두 직선이 평행하므로 한 직선의 임의의 점과 나머지 직선 사이의 거리를 구하면 된다.

$3x + 4y = 24$ 의 점 $(0, 6)$

$$\frac{|0 \times 3 + 6 \times 4 - 4|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 4$$

23. 두 직선 $3x + 4y = 24$, $3x + 4y = 7$ 사이의 거리를 $\frac{b}{a}$ (a, b 는 서로소)라 할 때, $b - a$ 의 값은?

- ① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

해설

두 직선이 평행하므로 한 직선의 임의의 점과 다른 직선 사이의 거리를 구하면 된다.

$3x + 4y = 24$ 의 점 (0, 6)

$$\frac{|4 \times 6 - 7|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{17}{5}$$

$$\therefore b - a = 12$$

24. 직선 $x + 2y - 1 = 0$ 에 수직이고 원점에서 거리 $\sqrt{5}$ 인 직선의 방정식은?

- ① $y - 2x = -5$ ② $y - 2x = -\sqrt{5}$ ③ $y + 2x = 5$
④ $y + 2x = \sqrt{5}$ ⑤ $y + 2x = -\sqrt{5}$

해설

구하는 직선의 기울기를 m' 라 하면

$$-\frac{1}{2}m' = -1 \text{ 에서 } m' = 2$$

따라서, 구하는 직선의 식은

$$y = 2x + n, \quad 2x - y + n = 0$$

원점에서 이 직선까지의 거리

$$d = \frac{|n|}{\sqrt{4+1}} = \sqrt{5},$$

$$|n| = 5, \quad n = \pm 5$$

\therefore 구하는 직선의 식 : $y = 2x + 5$ 또는 $y = 2x - 5$

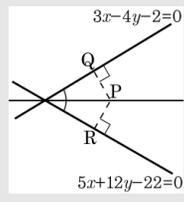
25. 두 직선 $3x-4y-2=0$, $5x+12y-22=0$ 이 이루는 각을 이등분하는 직선의 방정식 중에서 기울기가 양인 직선이 $ax+by+c=0$ 일 때, $a+b+c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -1

해설

구하는 각의 이등분선 위의 임의의 점 $P(X, Y)$ 에 대하여 P에서 두 직선에 내린 수선의 발을 각각 Q, R이라 하면



$\overline{PQ} = \overline{PR}$ 이므로

$$\frac{|3X - 4Y - 2|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{|5X + 12Y - 22|}{\sqrt{25 + 144}}$$

$$13(3X - 4Y - 2) = \pm 5(5X + 12Y - 22)$$

$$\text{즉, } 13(3X - 4Y - 2) = 5(5X + 12Y - 22) \text{ 또는}$$

$$13(3X - 4Y - 2) = -5(5X + 12Y - 22) \text{ 정리하면}$$

$$x - 8y + 6 = 0 \text{ 또는 } 8x + y - 17 = 0 \text{ 에서}$$

기울기가 양이므로

$$\therefore x - 8y + 6 = 0$$

$$\therefore a + b + c = -1$$

26. 두 직선 $3x+2y-1=0$ 과 $2x-3y+1=0$ 으로부터 같은 거리에 있는 점들 중 x 와 y 의 좌표가 모두 정수인 점에 대한 다음 설명 중 옳은 것만을 골라 놓은 것은?

- I. 위 조건을 만족하는 점은 유한개이다.
 II. 제2사분면의 점들 중에서 위 조건을 만족하는 것이 없다.
 III. 제3사분면에 있는 모든 점들의 y 좌표는 5의 배수이다.

- ① I ② II ③ III ④ I, III ⑤ II, III

해설

두 직선에서 같은 거리에 있는 점을 $P(a, b)$ 라고 하면

$$\frac{|3a+2b-1|}{\sqrt{13}} = \frac{|2a-3b+1|}{\sqrt{13}}$$

$$3a+2b-1 = 2a-3b+1 \text{ 또는}$$

$$3a+2b-1 = -2a+3b-1 \text{ 이므로}$$

$$a+5b-2=0, 5a-b=0 \text{ 에서}$$

$$x+5y-2=0, 5x-y=0$$

$$\text{즉, } y = -\frac{1}{5}x + \frac{2}{5} \text{ 와}$$

$y = 5x$ 위에 있는 모든 점들은
 주어진 두 직선에서 이르는 거리가 같다.

I. 이러한 좌표는 무한개 존재한다.

$$\text{II. } y = -\frac{1}{5}x + \frac{2}{5}$$

위의 점, 예를 들면 $(-3, 1)$ 이 있다.

III. $y = 5x$ 로 x 가 정수일 때,
 y 좌표는 5의 배수이다.

27. 점 (a, b) 가 직선 $2x - y - 2 = 0$ 위를 움직일 때, 점 $(a, a + b)$ 의 자취의 방정식은?

① $y = 3x - 2$ ② $y = 4x - 3$ ③ $y = 5x - 4$

④ $y = 6x - 5$ ⑤ $y = 7x - 6$

해설

$$x = a \cdots \textcircled{1}$$

$$y = a + b \cdots \textcircled{2} \text{에서}$$

a, b 를 소거한다.

점 (a, b) 가 직선 $2x - y - 2 = 0$ 위를

움직이므로 $2a - b - 2 = 0$

$\therefore b = 2a - 2$ 이것을 $\textcircled{2}$ 에 대입하면

$$y = 3a - 2$$

$$\therefore y = 3x - 2 (\because \textcircled{1})$$

28. 두 점 A(3, 2), B(a, b) 를 지나는 직선의 기울기가 2 이고, 이 직선과 직선 $x+2y-3=0$ 의 교점은 선분 AB 를 2 : 1 로 내분하는 점이다. 이 때, $3a+b$ 의 값은?

- ① 3 ② 5 ③ 7 ④ 9 ⑤ 10

해설

직선 AB 의 기울기는 2 이므로

$$\frac{b-2}{a-3} = 2, b-2 = 2(a-3), b = 2a-4 \dots \textcircled{1}$$

\overline{AB} 를 2 : 1 로 내분하는 점은

$$\left(\frac{2a+1 \cdot 3}{2+1}, \frac{2b+1 \cdot 2}{2+1} \right) = \left(\frac{2a+3}{3}, \frac{2b+2}{3} \right) \text{ 이고,}$$

이 점은 직선 $x+2y-3=0$ 위에 있으므로

$$\frac{2a+3}{3} + 2 \cdot \frac{2b+2}{3} - 3 = 0$$

$$\therefore a+2b-1=0 \dots \textcircled{2}$$

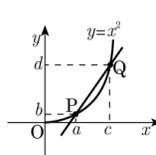
①, ②을 연립하여 풀면

$$a = \frac{9}{5}, b = -\frac{2}{5} \text{ 이다.}$$

$$\therefore 3a+b=5$$

29. 함수 $y = x^2$ 의 그래프 위의 두 점 $P(a, b)$, $Q(c, d)$ 에 대하여 $\frac{\sqrt{b} + \sqrt{d}}{2} = 1$ 일 때, 직선 PQ 의 기울기는?(단, $0 < a < c$)

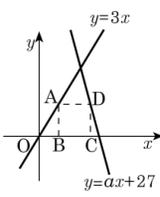
- ① $\frac{5}{2}$ ② 2 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 1 ⑤ $\frac{1}{2}$



해설

점 $P(a, b)$, $Q(c, d)$ 는 $y = x^2$ 의 그래프 위의 점이므로 $b = a^2$, $d = c^2$
 즉, $a = \sqrt{b}$, $c = \sqrt{d}$ ($\because 0 < a < c$)
 $(PQ$ 의 기울기) $= \frac{d-b}{c-a} = \frac{c^2-a^2}{c-a}$
 $= \frac{(c-a)(c+a)}{c-a}$
 $= c+a = \sqrt{d} + \sqrt{b} = 2$

30. 다음 그림과 같이 좌표평면 위에 한 변의 길이가 3인 정사각형 ABCD가 있다. 일차함수 $y = 3x$ 의 그래프가 점 A를 지나고, 일차함수 $y = ax + 27$ 의 그래프가 점 D를 지날 때, 기울기 a 의 값은? (단, 두 점 B, C는 x 축 위의 점이다.)

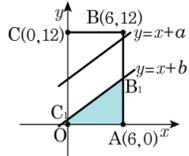


- ① -4 ② $-\frac{9}{2}$ ③ -5
 ④ $-\frac{11}{2}$ ⑤ -6

해설

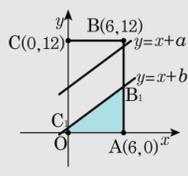
$\overline{AB} = 3$ 이므로 점 A의 y 좌표는 3 이고,
 점 A는 일차함수 $y = 3x$ 의 그래프 위의 점이므로 x 좌표가 1 이다.
 점 A와 x 좌표가 같은 점 B의 좌표는 (1, 0)이고, $\overline{BC} = 3$ 이므로
 점 C의 좌표는 (4, 0)이다.
 점 C와 x 좌표가 같고, 점 A와 y 좌표가 같은 점 D의 좌표는
 (4, 3)이다.
 점 D가 일차함수 $y = ax + 27$ 위의 점이므로 $x = 4, y = 3$ 를
 대입하면 $3 = a \times 4 + 27$
 $\therefore a = -6$

31. 네 점 $O(0,0)$, $A(6,0)$, $B(6,12)$, $C(0,12)$ 를 꼭지점으로 하는 사각형 $OABC$ 가 있다. 그림과 같이 두 직선 $y = x + a$, $y = x + b$ 가 사각형 $OABC$ 의 넓이를 삼등분할 때, ab 의 값은?



- ① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설



사각형 $OABC$ 의 넓이가 72이므로
사각형 OAB_1C_1 의 넓이는 24이다.

$$\frac{1}{2}(b + 6 + b) \times 6 = 24 \text{ 이므로 } b = 1$$

같은 방법으로 $a = 5$

$$\therefore ab = 5$$

32. 두 직선 $y = ax$ 와 $y = bx$ 가 서로 수직이고, 직선 $x = 2$ 와 만나는 두 점을 P, Q라 할 때, P, Q의 중점이 $(2, \frac{3}{2})$ 이다. 이때, $|a - b|$ 의 값은?
(단, $a > 0, b < 0$)

- ① 1 ② 2 ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 4

해설

$$P(2, 2a), Q(2, 2b)$$

$$\therefore P, Q \text{의 중점} : \left(\frac{2+2}{2}, \frac{2a+2b}{2} \right) = \left(2, \frac{3}{2} \right)$$

$$\Rightarrow a + b = \frac{3}{2} \quad \dots \text{㉠}$$

$y = ax$ 와 $y = bx$ 가 서로 수직이므로

$$a \times b = -1 \quad \dots \text{㉡}$$

$\therefore (a+b)^2 = (a-b)^2 + 4ab$ 이므로

$$(a-b)^2 = \frac{9}{4} + 4$$

$$\Rightarrow a - b = \frac{5}{2} \quad (\because a > 0, b < 0)$$

33. 세 직선 $2x+y+1=0$, $x-y+2=0$, $ax-y=0$ 이 삼각형을 만들지 못할 때, 상수 a 의 값을 구하면? (단, $a > 0$)

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

삼각형을 만들지 못하게 하려면 $ax-y=0$ 이 나머지 두 직선과 평행하거나, 세 직선이 한 점에서 만나야 한다.

i) $ax-y=0$ 이 다른 두 직선과 평행할 때
두 직선의 기울기가 각각 $-2, 1$ 이므로
 $a = -2$ 또는 $1 \quad \therefore a = 1 (\because a > 0)$

ii) 세 직선이 한 점에서 만날 때
 $2x+y+1=0$ 와 $x-y+2=0$ 의 교점은 $(-1, 1)$
 $ax-y=0$ 이 이 점을 지나려면
 $a = -1$ (부적당)

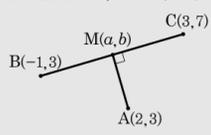
i), ii)에서 $a = 1$

34. 점 A(2, 3)에서 두 점 B(-1, 3), C(3, 7) 을 이은 선분 BC 에 내린 수선의 발을 M(a, b) 라 할 때, 4ab 의 값은?

- ① 7 ② 9 ③ 11 ④ 13 ⑤ 15

해설

$\overline{BC} \perp \overline{AM}$ 이므로 두 직선의 기울기의 곱은 -1 이다.



$$\text{즉, } \frac{7-3}{3-(-1)} \times \frac{b-3}{a-2} = -1$$

$$b-3 = -(a-2), \quad \therefore a+b=5 \dots \text{㉠}$$

한편, 직선 BC 의 방정식은

$$y-3 = \frac{7-3}{3-(-1)}(x+1)$$

$$\therefore y = x+4$$

이 때, 점 M 이 \overline{BC} 위의 점이므로

$$b = a+4 \dots \text{㉡}$$

$$\text{㉠, ㉡을 연립하여 풀면 } a = \frac{1}{2}, b = \frac{9}{2}$$

$$\therefore 4ab = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{2} = 9$$

35. 두 점 A(3, 2), B(a, b)를 지나는 직선의 기울기가 2이고, 이 직선과 직선 $x+2y-3=0$ 의 교점은 선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점이다. 이 때, $3a+b$ 의 값은?

- ① 3 ② 5 ③ 7 ④ 9 ⑤ 10

해설

직선 AB의 기울기는 2이므로

$$\frac{b-2}{a-3} = 2, b-2 = 2(a-3), b = 2a-4 \dots \textcircled{1}$$

\overline{AB} 를 2 : 1로 내분하는 점은

$$\left(\frac{2a+1 \cdot 3}{2+1}, \frac{2b+1 \cdot 2}{2+1} \right) = \left(\frac{2a+3}{3}, \frac{2b+2}{3} \right) \text{ 이고}$$

이 점은 직선 $x+2y-3=0$ 위에 있으므로

$$\frac{2a+3}{3} + 2 \cdot \frac{2b+2}{3} - 3 = 0$$

$$\therefore a+2b-1=0 \dots \textcircled{2}$$

①, ②를 연립하여 풀면 $a = \frac{9}{5}, b = -\frac{2}{5}$ 이다.

$$\therefore 3a+b=5$$

36. 두 직선 $y = -x + 3, y = mx + m + 2$ 이 제 1사분면에서 만나도록 하는 m 의 값의 범위가 $\alpha < m < \beta$ 일 때, $2\alpha + \beta$ 의 값은?

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

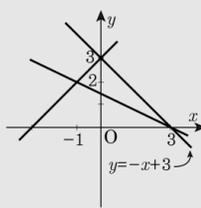
$m(x+1) - (y-2) = 0$ 에서 $y = mx + m + 2$ 는 m 의 값에 관계없이 $(-1, 2)$ 를 지난다.

$(3, 0)$ 을 지날때 $m = -\frac{1}{2}$

$(0, 3)$ 을 지날때 $m = 1$

$\therefore -\frac{1}{2} < m < 1$

따라서 $2\alpha + \beta = 0$



37. y축 위의 한 점 P로부터 두 직선 $x-y+3=0$, $x-y-1=0$ 에 이르는 거리가 같을 때, 점 P의 좌표는?

① (1, -2)

② (-1, 2)

③ (0, 2)

④ (0, 1)

⑤ (0, -2)

해설

y축 위의 한 점을 P(0, y)라 하면 직선 $x-y+3=0$ 과 점 P 사이의 거리는

$$d_1 = \frac{|-y+3|}{\sqrt{2}}$$

직선 $x-y-1=0$

과 점 P 사이의 거리는

$$d_2 = \frac{|-y-1|}{\sqrt{2}}$$

$d_1 = d_2$ 이므로

$$\frac{|-y+3|}{\sqrt{2}} = \frac{|-y-1|}{\sqrt{2}}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$-8y = -8 \therefore y = 1$$

$\therefore P(0, 1)$

38. 서로 다른 두 직선 $2x - ay - 2 = 0$, $x - (a - 3)y - 3 = 0$ 이 평행할 때, 두 직선 사이의 거리를 구하면?

- ① $\frac{\sqrt{6}}{5}$ ② $\frac{\sqrt{7}}{5}$ ③ $\frac{2\sqrt{2}}{5}$ ④ $\frac{3}{5}$ ⑤ $\frac{\sqrt{10}}{5}$

해설

$$\begin{cases} 2x - ay - 2 = 0 \\ x - (a - 3)y - 3 = 0 \end{cases} \quad \text{정리하면}$$

$$\begin{cases} y = \frac{2}{a}x - \frac{2}{a} \\ y = \frac{1}{a-3}x - \frac{3}{a-3} \end{cases} \quad \text{평행하므로}$$

$$\frac{2}{a} = \frac{1}{a-3}$$

$\therefore a = 6$ 대입하면

$$\begin{cases} x - 3y - 1 = 0 \\ x - 3y - 3 = 0 \end{cases}$$

$x - 3y - 1 = 0$ 위의 점 $(1, 0)$ 과 $x - 3y - 3 = 0$ 과의 거리는

$$\therefore \frac{|1 - 3|}{\sqrt{1^2 + 3^2}} = \frac{2\sqrt{10}}{10} = \frac{\sqrt{10}}{5}$$

39. 두 직선 $x-y+1=0$, $x-2y+3=0$ 의 교점을 지나고, 원점에서부터의 거리가 1인 직선의 방정식을 $ax+by+c=0$ 이라고 할 때, $a+b+c$ 의 값은?

- ① -2 ② -1 또는 2 ③ 4
④ -2 또는 4 ⑤ 0 또는 4

해설

두 직선 $x-y+1=0$, $x-2y+3=0$ 의 교점을 지나고, 원점에서부터의 거리가 1인 직선의 방정식은 $x-2y+3+k(x-y+1)=0$ 으로 나타낼 수 있다. 이 식을 정리하면 $(1+k)x+(-2-k)y+(3+k)=0 \cdots \textcircled{1}$ 원점에서 이 직선까지의 거리가 1 이므로 $\frac{3+k}{\sqrt{(1+k)^2+(-2-k)^2}}=1$ 양변에 제곱하여 정리하면 $(3+k)^2=(1+k)^2+(-2-k)^2, k^2=4$ $\therefore k=\pm 2$ 이것을 ①에 대입하여 정리하면 $3x-4y+5=0$ 또는 $x-1=0$ 따라서 $a+b+c$ 는 0 또는 4

40. 원점에서 직선 $(a-1)x + (a+3)y - 4 = 0$ 에 이르는 거리를 $f(a)$ 라 할 때, $f(a)$ 의 최댓값은? (단, a 는 상수)

- ① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ 2 ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 4

해설

$$f(a) = \frac{|-4|}{\sqrt{(a-1)^2 + (a+3)^2}}$$
$$= \frac{4}{\sqrt{2a^2 + 4a + 10}}$$

이 때, $f(a)$ 의 값이 최대가 되려면 분모가 최소이어야 한다.

$$2a^2 + 4a + 10 = 2(a^2 + 2a) + 10 = 2(a+1)^2 + 8$$

즉, 분모의 최솟값은 $\sqrt{8}$ 이므로

$$f(a) \text{ 의 최댓값은 } \therefore \frac{4}{\sqrt{8}} = \sqrt{2}$$

41. 좌표평면에서 원점과 직선 $x+y-2+k(x-y)=0$ 사이의 거리를 $f(k)$ 라 할 때, $f(k)$ 의 최댓값은? (단, k 는 실수)

- ① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ 2 ⑤ $\sqrt{5}$

해설

준식을 변형하면 $(1+k)x+(1-k)y-2=0$ 이므로

$$f(k) = \frac{|-2|}{\sqrt{(1+k)^2+(1-k)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{k^2+1}}$$

따라서, $k=0$ 일 때 $f(k)$ 의 최댓값은 $\sqrt{2}$

42. 세 직선 $2x - y - 4 = 0$, $3x - 4y + 9 = 0$, $4x + 3y + 12 = 0$ 으로 둘러싸인 삼각형의 넓이는?

- ① 10 ② 15 ③ 20 ④ 25 ⑤ 30

해설

$$2x - y - 4 = 0 \dots\dots ㉠$$

$$3x - 4y + 9 = 0 \dots\dots ㉡$$

$$4x + 3y + 12 = 0 \dots\dots ㉢$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x = 5, y = 6$

㉠, ㉢을 연립하여 풀면 $x = 0, y = -4$

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $x = -3, y = 0$

세 직선 $2x - y - 4 = 0$, $3x - 4y + 9 = 0$, $4x + 3y + 12 = 0$ 으로 이루어지는

삼각형은 세 점 $A(5, 6)$, $B(0, -4)$, $C(-3, 0)$ 을 꼭짓점으로 하는 $\triangle ABC$ 이다.

따라서 점 $(5, 6)$ 과 직선 $4x + 3y + 12 = 0$

$$\text{사이의 거리는 } \frac{|4 \times 5 + 3 \times 6 + 12|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{|50|}{5} = 10$$

$$\text{또, } \overline{BC} = \sqrt{(-3 - 0)^2 + (0 + 4)^2} = 5$$

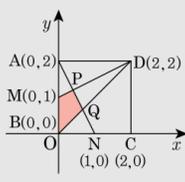
따라서 $\triangle ABC$ 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 5 \times 10 = 25$$

43. 한 변의 길이가 2인 정사각형 ABCD에서 두변 \overline{AB} , \overline{BC} 의 중점을 각각 M, N이고, P, Q를 각각 \overline{AN} , \overline{DM} 과 \overline{AN} , \overline{DB} 의 교점이라 할 때, 사각형 BMPQ의 넓이는?

- ① $\frac{7}{15}$ ② $\frac{3}{5}$ ③ $\frac{1}{5}$ ④ $\frac{9}{16}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

해설



좌표를 이용하여

A(0, 2), B(0, 0), C(2, 0), D(2, 2)라고 표시하면,
M(0, 1), N(1, 0)이고, 직선 BQ, PQ, MP의 방정식은

$$\text{각각 } y = x, \quad y = -2x + 2, \quad y = \frac{1}{2}x + 1$$

따라서 $P\left(\frac{2}{5}, \frac{6}{5}\right)$, $Q\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ 이므로

$$\square \text{BMPQ} = \triangle \text{ABN} - \triangle \text{AMP} - \triangle \text{BNQ}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{2}{5} - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{7}{15}$$

44. 좌표평면 위의 점 P(4, 9)를 지나고 x절편과 y절편, 기울기가 모두 정수인 직선의 개수는 ?

- ① 4 ② 5 ③ 6 ④ 8 ⑤ 9

해설

점 P(4, 9)를 지나는 직선의 기울기를

m 이라 하면

직선의 방정식은 $y - 9 = m(x - 4) \dots \textcircled{1}$

x절편 : $\textcircled{1}$ 에 $y = 0$ 을 대입하면

$$-9 = m(x - 4)$$

$$\therefore x = 4 - \frac{9}{m}$$

y절편 : $\textcircled{1}$ 에 $x = 0$ 을 대입하면

$$y - 9 = -4m$$

$$\therefore y = 9 - 4m$$

따라서 x절편, y절편이 모두 정수가 되기 위해서는 m 의 값은 9의 약수(음수 포함)이어야 한다.

따라서 $m = 1, 3, 9, -1, -3, -9$

\therefore 직선은 6개 존재한다.

45. 세 직선 $y = 2x + 1$, $2y = x + 2$, $x + y = 4$ 로 둘러싸인 삼각형의 넓이는?

- ① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

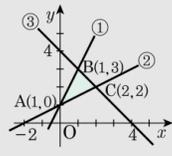
해설

$$y = 2x + 1 \cdots ①$$

$$y = \frac{1}{2}x + 1 \cdots ②$$

$$y = -x + 4 \cdots ③$$

의 그래프를 그리면 아래와 같다.



A의 좌표 : (0, 1)

B의 좌표 : ①과 ③을 연립하여 풀면 (1, 3)

C의 좌표 : ②와 ③을 연립하여 풀면 (2, 2)

$\therefore A(0, 1), B(1, 3), C(2, 2)$

$$\therefore S = \frac{1}{2} |(0-1)2 + (1-2)1 + (2-0)3|$$

$$= \frac{1}{2} |-3 + 6| = \frac{3}{2}$$