1. 직선 $ax + by + c = 0$은 $ab > 0,\ bc < 0$일 때, 몇 사분면을 지나지 않는가?

① 제 1 사분면 ② 제 2 사분면

③ 제 3 사분면 ④ 제 4 사분면

⑤ 제 1 사분면 ,제 2 사분면

해설

$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$에서

$-\frac{a}{b} < 0\ (\because\ ab > 0)$

$-\frac{c}{b} > 0\ (\because\ bc < 0)$이므로

제 1 사분면, 제 2 사분면, 제 4 사분면을 지난다.

2. 직선 $x+ay+3=0$이 $2x-3y-5=0$에 평행하도록 상수 a의 값은?

① $\frac{3}{2}$ ② $-\frac{3}{2}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $-\frac{2}{3}$ ⑤ $-\frac{3}{4}$

해설

두 직선 $x+ay+3=0,\ 2x-3y-5=0$이 평행

$\frac{2}{1}=\frac{-3}{a}\neq\frac{-5}{3}$, 즉 $\frac{2}{1}=\frac{-3}{a}$

$\therefore\ a=-\frac{3}{2}$

3. 두 점 $(2,-1)$, $(4,3)$ 을 지나는 직선과 원점 사이의 거리는 ?

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ 2 ⑤ $\sqrt{5}$

해설

두 점 $(2,-1)$, $(4,3)$ 을 지나는 직선은

$$y+1=\frac{3-(-1)}{4-2}(x-2)$$

$$\therefore 2x-y-5=0$$

원점에서 이 직선까지의 거리는

$$\frac{|2\times0-0-5|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$$

4. 직선 $(a+2)x-y-a+b=0$ 이 x 축의 양의 방향과 $45°$ 의 각을 이루고 y 절편이 4 일 때, $a+b$ 의 값을 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$y=(a+2)x-a+b$ 에서

기울기$=a+2=\tan 45°=1$

$\therefore\ a=-1$

y 절편 $-a+b=4$

$\therefore\ b=3$

$\therefore\ a+b=2$

5. 두 점 $(4,-2),(2,-3)$을 지나는 직선의 x절편을 A, y절편을 B, 원점을 O라 할 때, $\triangle$OAB의 면적을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$(4,-2),(2,-3)$를 지나는 직선은

$$y=\frac{-2-(-3)}{4-2}(x-2)-3=\frac{1}{2}x-4$$

$\Rightarrow$ x절편은 8이고, y절편은 -4이다.

$\therefore$ $\triangle$OAB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 8\times 4=16$ 이다.

6. 어떤 시험 결과, 최저점은 25 점, 최고점은 160 점이었다. 이 점수를 환산식 $y = ax + b$에 의하여 최저점을 10 점, 최고점을 100 점으로 고치려고 한다. 처음의 100 점은 나중의 몇 점으로 환산되겠는가?

① 30　② 40　③ 50　④ 60　⑤ 70

해설

$25a + b = 10$, $160a + b = 100$이므로 두 식을 연립한다.

$$\Rightarrow \quad a = \frac{2}{3} \quad b = -\frac{20}{3}$$

$\therefore$ 100 점을 환산하면, $\frac{2}{3} \times 100 - \frac{20}{3} = 60$

7. 양 끝점의 좌표가 A(3, 17), B(48, 281) 인 선분 AB 위의 점 중에서 x 좌표와 y 좌표가 모두 정수인 점의 개수는?

① 2 개 ② 4 개 ③ 15 개 ④ 16 개 ⑤ 46 개

해설

선분 AB 의 방정식은

$$y = \frac{88}{15}(x-3) + 17$$

$3 \le x \le 48$

이때, y가 정수이려면,

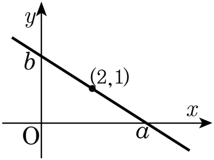
$x-3$ 이 15 의 배수이어야 한다.

따라서 $x = 3, 18, 33, 48$ 로 모두 4 개이다.

문제의 조건을 만족시키는 점의 좌표는

(3, 17), (18, 105), (33, 193), (48, 281) 로 모두 4 개

8. 다음 그림에서 a와 b사이의 관계식을 나타내면?



① $a+\dfrac{a}{2}=1$　　② $\dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{b}=1$

③ $\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}=1$　　④ $\dfrac{2}{a}+b=1$

⑤ $\dfrac{1}{2a}+\dfrac{1}{b}=1$

해설

x 절편이 a, y 절편이 b 인 직선의 방정식은

$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ 이다.

따라서 $(2,\ 1)$ 을 지나므로

$\dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{b}=1$ 이다.

9. 직선 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2$ 와 x 축 및 y 축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이가 12 일 때, ab 의 값은? (단, $a>0,\ b>0$)

① 3 ② 4 ③ 6 ④ 12 ⑤ 24

해설

직선 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2$ 에서 $\frac{x}{2a}+\frac{y}{2b}=1$ 이므로 x 절편은 $2a$, y 절편은 $2b$ 이다.

이 때, $a,\ b$ 가 양수이므로

직선 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2$ 와 x 축 및 y 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 2a\times 2b=2ab=12$

$\therefore\ ab=6$

10. 두 점 $(-1, 2), (3, 4)$ 를 지나는 직선이 x 축, y 축과 각각 점 A, B 에서 만날 때, 삼각형 OAB 의 넓이는? (단 O 는 원점)

① $\frac{21}{4}$ ② $\frac{13}{3}$ ③ $\frac{25}{4}$ ④ $\frac{24}{5}$ ⑤ $\frac{37}{6}$

해설

두 점 $(-1, 2), (3, 4)$ 를 지나는 직선의 방정식은 $y - 4 = \frac{4-2}{3-(-1)}(x-3)$

$\therefore y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$

$y = 0$ 을 대입하면

$0 = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}, x = -5$

따라서 x 축과 만나는 점 A 의 좌표는 $A(-5, 0)$

㉠의 y 절편이 $\frac{5}{2}$ 이므로

y 축과 만나는 점 B 의 좌표는 $B(0, \frac{5}{2})$,

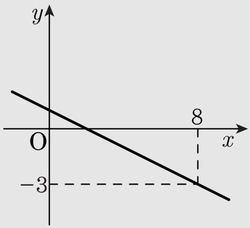
$\triangle OAB = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{5}{2} = \frac{25}{4}$

11. 점 $(8,-3)$ 을 지나고, x축, y축의 양의 부분으로 둘러싸인 삼각형의 넓이가 1 인 직선의 방정식으로 알맞은 것은?

① $\frac{x}{2}+\frac{y}{2}=1$ ② $\frac{x}{2}+y=1$ ③ $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$

④ $x+\frac{y}{3}=1$ ⑤ $\frac{x}{3}+\frac{y}{3}=1$

해설



x절편이 a 이고, y절편이 b 인 직선의 방정식은 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$

이 직선이 점 $(8,-3)$ 을 지나므로

$\frac{8}{a}+\frac{(-3)}{b}=1\cdots$ ㉠

두 좌표축과 직선이 이루는 삼각형의 넓이 S 는

$S=\frac{1}{2}ab=1\cdots$ ㉡

㉡에서 $\frac{1}{a}=\frac{1}{2}b$

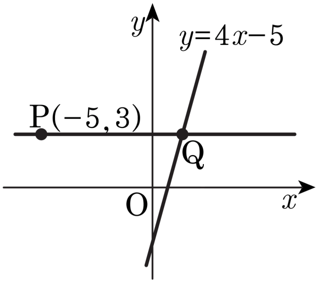
이것을 ㉠에 대입하면 $8\times\frac{1}{2}b-\frac{3}{b}=1$ 에서

$4b^2-b-3=0 \quad \therefore \ (4b+3)(b-1)=0$

$b>0$ 이므로 $b=1 \quad \therefore \ a=2$

따라서 구하는 직선의 방정식은 $\frac{x}{2}+y=1$

12. 다음 그림과 같이 좌표평면 위의 점 $P(-5, 3)$을 지나고 x축에 평행한 직선이 일차함수 $y = 4x - 5$ 의 그래프와 만나는 점을 Q 라 한다. $\overline{PQ}$의 길이는?



① 6　　② $\frac{13}{2}$　　③ 7　　④ $\frac{15}{2}$　　⑤ 8

해설

점 P 를 지나고 x축에 평행한 직선의 방정식은 $y = 3$ 이다.
점 Q의 y좌표가 3이므로
$y = 4x - 5$에 $y = 3$을 대입하면 $3 = 4x - 5$
$\therefore x = 2$
따라서 점 Q의 좌표는 $(2,\ 3)$ 이다.
$\therefore \overline{PQ} = 2 - (-5) = 7$

13. 좌표평면 위에 서로 다른 세 점 $A(-2k-1, 5)$ $B(k, -k-10)$, $C(2k+5, k-1)$가 일직선 위에 있을 때, k의 값의 곱을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

세 점 A, B, C가 일직선 위에 있으므로
직선 AB와 직선 BC의 기울기는 같다.

$$\frac{-k-10-5}{k-(-2k-1)} = \frac{(k-1)-(-k-10)}{2k+5-k}$$

이 식을 정리하면 $k^2+7k+12=0$

$\therefore$ k의 값의 곱은 12이다.

14. $ab<0$, $bc<0$일 때, 직선 $ax+by+c=0$이 지나지 않는 사분면을 구하면?

① 제1 사분면 ② 제2, 3 사분면 ③ 제4 사분면

④ 제3 사분면 ⑤ 제3, 4 사분면

해설

$ax+by+c=0 \Rightarrow \quad y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$

$ab<0$, $bc<0$이므로 기울기는 양수, y 절편은 양수이다.

$\therefore$ 제4분면은 지나지 않는다.

15. 상수 a, b, c가 조건 $ab > 0$, $bc < 0$을 만족시킬 때 방정식 $ax+by-c=0$이 나타내는 그래프가 지나는 사분면을 <u>모두</u> 고르면?

① 제 1, 2, 3 사분면
② 제 2, 3, 4 사분면
③ 제 1, 3, 4 사분면
④ 제 1, 2 사분면
⑤ 제 2, 3 사분면

해설

$$ax+by-c=0 \Rightarrow \quad y=-\frac{a}{b}x+\frac{c}{b}$$

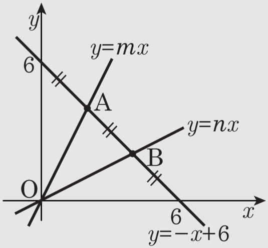
$ab>0$, $bc<0$이므로
기울기는 $(-)$, y절편은 $(-)$이다.
$\therefore$ 제 2, 3, 4사분면을 지난다.

16. 직선 $x+y-6=0$과 x축, y축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 두 직선 $y=mx$, $y=nx$ 에 의하여 삼등분 될 때, $m+n$ 의 값은?

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 4

해설

다음 그림과 같이 직선 $y=-x+6$과 두 직선 $y=mx$, $y=nx$의 교점을 각각 A, B라 하면 두 점 $(6,\ 0)$, $(0,\ 6)$을 잇는 선분을 $2:1$로 내분하는 점이 A이고, $1:2$로 내분하는 점이 B이다.



이 때, 두 점 A, B의 좌표는

$$\mathrm{A}\left(\frac{2\cdot 0+1\cdot 6}{2+1},\ \frac{2\cdot 6+1\cdot 0}{2+1}\right),$$

$$\mathrm{B}\left(\frac{1\cdot 0+2\cdot 6}{1+2},\ \frac{1\cdot 6+2\cdot 0}{1+2}\right)$$

$\therefore$ A$(2,\ 4)$, B$(4,\ 2)$

따라서, 직선 $y=mx$는 점 $(2,\ 4)$를 지나고, 직선 $y=nx$는 점 $(4,\ 2)$를 지나므로

$$m=2,\ n=\frac{1}{2}$$

$$\therefore m+n=\frac{5}{2}$$

17. x, y에 관한 이차방정식 $2x^2-3xy+ay^2-2x+9y+b=0$이 직교하는 두 직선의 곱을 나타낼 때, ab를 구하면?

① 2　　② 4　　③ 6　　④ 8　　⑤ 10

해설

준식이 나타내는 두 직선을

$px+qy+r=0 \cdots$ ㉠ ,

$p'x+q'y+r'=0 \cdots$ ㉡이라 하자.

㉠과 ㉡은 서로 직교하므로

$pp'+qq'=0$이다.

(준식)$=(px+qy+r)(p'x+q'y+r')=0$의 전개식에서 x^2의 계수와 y^2의 계수의 합은

$pp'+qq'$이므로 $a+2=pp'+qq'=0$

$\therefore\ a=-2$

$a=-2$를 준식에 대입하여 정리하면

(준식)

$=2x^2-(3y+2)x+(-2y^2+9y+b)=0 \cdots$ ㉢

㉢이 두 직선의 곱을 나타내므로

㉢의 판별식 $\mathrm{D}_1=(3y+2)^2-8(-2y^2+9y+b)$

$=25y^2-60y+(4-8b) \cdots$ ㉣이 완전제곱식이다.

따라서 ㉣의 판별식 $\frac{\mathrm{D}_2}{4}$는 0이다.

$\frac{\mathrm{D}_2}{4}=30^2-25(4-8b)=0$

$\therefore\ b=-4$

$\therefore\ ab=(-2)\cdot(-4)=8$

18. 직선 $ax+y-1=0$이 직선 $2x+by-5=0$에 평행하고, 직선 $x+(a-1)y-3=0$에 수직일 때, $2a+b$의 값은?

① 5　② 6　③ 7　④ 8　⑤ 9

해설

두 직선이 평행하면 기울기가 일치한다.

$\Rightarrow \ -a=-\dfrac{2}{b} \ \cdots$ ㉠

두 직선이 수직하면 기울기의 곱이 -1이다.

$\Rightarrow \ -a\times-\dfrac{1}{(a-1)}=-1 \ \cdots$ ㉡

$\therefore$ ㉠,㉡를 연립하면, $a=\dfrac{1}{2} \ \ b=4$

$\therefore \ 2a+b=5$

19. 두 직선 $2x+3y=3$, $3x-2y=-2$ 의 교점을 지나고, 한 점$(-1,\ 2)$를 지나는 직선의 방정식은?

① $x+y+1=0$ ② $x+y-1=0$ ③ $2x+y-1=0$

④ $2x+y+1=0$ ⑤ $3x+y-1=0$

해설

두 직선 $ax+by+c=0$ 과 $a'x+b'y+c'=0$ 의
교점을 지나는 직선의 방정식은
$ax+by+c+k(a'x+b'y+c')=0$
두 직선 $2x+3y=3$ 과 $3x-2y=-2$ 의
교점을 지나는 직선의 방정식은
$2x+3y-3+k(3x-2y+2)\ =0$ 이고
이 직선이 점 $(-1,\ 2)$ 를 지나므로
대입하여 k 값을 구하면 $k=\dfrac{1}{5}$ 이다.
따라서 $2x+3y-3+\dfrac{1}{5}(3x-2y+2)=0$
$\therefore\ x+y-1=0$

20. 좌표평면 위의 세 점 O(0, 0), A(4, 3), B(2, 6) 을 꼭지점으로 하는 삼각형 OAB 의 무게중심을 G 라 할 때, 점 G 와 직선 OA 사이의 거리는?

① $\frac{4}{5}$ ② 1 ③ $\frac{6}{5}$ ④ $\frac{7}{5}$ ⑤ $\frac{8}{5}$

해설

삼각형 OAB 의 무게중심은 G(2,3) , 직선 OA 의 방정식은

$y = \frac{3}{4}x$ 곧 $3x - 4y = 0$ 이다.

따라서 점 G 와 직선 OA 의 거리 d 는

$$d = \frac{|3 \cdot 2 - 4 \cdot 3|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{6}{5}$$

21. $x+2y-3=0$, $2x-y-1=0$ 에 이르는 거리가 같은 x 축 위의 점의 좌표를 구하면?

① $(-2,\ 0),\ \left(\frac{4}{3},\ 0\right)$　　② $(-2, 0),\ (2, 0)$

③ $(0, -2),\ \left(0, \frac{4}{3}\right)$　　④ $(0, -2), (0, 2)$

⑤ $(-2, 0), (0, 0)$

해설

x 축 위의 점을 $(\alpha, 0)$ 이라 하자.
점과 직선 사이의 거리 구하는 공식을 이용하면,

$$\frac{|\alpha-3|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{|2\alpha-1|}{\sqrt{2^2+1^2}}$$

$$\Rightarrow\ |\alpha-3| = |2\alpha-1|$$

$$\Rightarrow\ (\alpha-3)^2 = (2\alpha-1)^2$$

$$\Rightarrow\ 3\alpha^2+2\alpha-8=0$$

$\alpha = \frac{4}{3}$ 또는 -2

$\therefore\ \left(\frac{4}{3}, 0\right),\ (-2, 0)$

22. 두 직선 $3x+4y=24$와 $3x+4y=4$사이의 거리를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

두 직선이 평행하므로 한 직선의 임의의 점과 나머지 직선 사이의 거리를 구하면 된다.

$3x+4y=24$ 의 점 $(0,6)$

$$\frac{|0\times 3+6\times 4-4|}{\sqrt{3^2+4^2}}=4$$

23. 두 직선 $3x+4y=24, 3x+4y=7$ 사이의 거리를 $\frac{b}{a}$(a, b 는 서로소)라 할 때, $b-a$ 의 값은?

① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

해설

두 직선이 평행하므로 한 직선의 임의의 점과 다른 직선 사이의 거리를 구하면 된다.

$3x+4y=24$ 의 점 $(0,\ 6)$

$$\frac{|4\times 6-7|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{17}{5}$$

$\therefore\ \ b-a=12$

24. 직선 $x+2y-1=0$ 에 수직이고 원점에서의 거리가 $\sqrt{5}$ 인 직선의 방정식은?

① $y-2x=-5$ ② $y-2x=-\sqrt{5}$ ③ $y+2x=5$

④ $y+2x=\sqrt{5}$ ⑤ $y+2x=-\sqrt{5}$

해설

구하는 직선의 기울기를 m' 라 하면

$-\frac{1}{2}m'=-1$ 에서 $m'=2$

따라서, 구하는 직선의 식은

$y=2x+n,\ 2x-y+n=0$

원점에서 이 직선까지의 거리

$$d=\frac{|n|}{\sqrt{4+1}}=\sqrt{5},$$

$|n|=5,\ n=\pm5$

$\therefore$ 구하는 직선의 식 : $y=2x+5$ 또는 $y=2x-5$

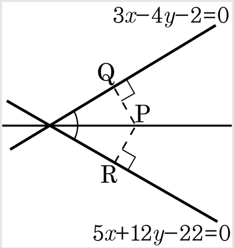
25. 두 직선 $3x-4y-2=0$, $5x+12y-22=0$ 이 이루는 각을 이등분하는 직선의 방정식 중에서 기울기가 양인 직선이 $ax+by+c=0$ 일 때, $a+b+c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

구하는 각의 이등분선 위의 임의의
점 $\mathrm{P}(X,\ Y)$ 에 대하여 P에서
두 직선에 내린 수선의 발을 각각 Q, R이라 하면



$\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{PR}}$ 이므로

$$\frac{|3X-4Y-2|}{\sqrt{9+16}}=\frac{|5X+12Y-22|}{\sqrt{25+144}}$$

$13(3X-4Y-2)=\pm5(5X+12Y-22)$

즉, $13(3X-4Y-2)=5(5X+12Y-22)$ 또는

$13(3X-4Y-2)=-5(5X+12Y-22)$ 정리하면

$x-8y+6=0$ 또는 $8x+y-17=0$ 에서

기울기가 양이므로

$\therefore\ x-8y+6=0$

$\therefore a+b+c=-1$

26. 두 직선 $3x+2y-1=0$ 과 $2x-3y+1=0$ 으로부터 같은 거리에 있는 점들 중 x 와 y 의 좌표가 모두 정수인 점에 대한 다음 설명 중 옳은 것만을 골라 놓은 것은?

Ⅰ. 위 조건을 만족하는 점은 유한개이다. Ⅱ. 제2사분면의 점들 중에서 위 조건을 만족하는 것이 없다. Ⅲ. 제3사분면에 있는 모든 점들의 y좌표는 5의 배수이다.

① Ⅰ ② Ⅱ ③ Ⅲ ④ Ⅰ, Ⅲ ⑤ Ⅱ, Ⅲ

해설

두 직선에서 같은 거리에 있는 점을
P$(a,\ b)$ 라고 하면

$$\frac{|3a+2b-1|}{\sqrt{13}}=\frac{|2a-3b+1|}{\sqrt{13}}$$

$3a+2b-1=2a-3b+1$ 또는
$3a+2b-1=-2a+3b-1$ 이므로
$a+5b-2=0,\ 5a-b=0$ 에서
$x+5y-2=0$, $5x-y=0$
즉, $y=-\frac{1}{5}x+\frac{2}{5}$ 와
$y=5x$ 위에 있는 모든 점들은
주어진 두 직선에서 이르는 거리가 같다.
Ⅰ. 이러한 좌표는 무한개 존재한다.
Ⅱ. $y=-\frac{1}{5}x+\frac{2}{5}$
위의 점, 예를 들면 $(-3,\ 1)$ 이 있다.
Ⅲ. $y=5x$ 로 x 가 정수일 때,
y 좌표는 5 의 배수이다.

27. 점 $(a,\ b)$가 직선 $2x-y-2=0$ 위를 움직일 때, 점 $(a,\ a+b)$의 자취의 방정식은?

① $y=3x-2$ ② $y=4x-3$ ③ $y=5x-4$

④ $y=6x-5$ ⑤ $y=7x-6$

해설

$x=a \cdots$ ㉠

$y=a+b \cdots$ ㉡ 에서

a, b 를 소거한다.

점 (a, b)가 직선 $2x-y-2=0$ 위를

움직이므로 $2a-b-2=0$

$\therefore b=2a-2$ 이것을 ㉡에 대입하면

$y=3a-2$

$\therefore y=3x-2$ ($\because$ ㉠)

28. 두 점 $A(3,\ 2)$, $B(a,\ b)$ 를 지나는 직선의 기울기가 2 이고, 이 직선과 직선 $x+2y-3=0$ 의 교점은 선분 AB 를 $2\ :\ 1$ 로 내분하는 점이다. 이 때, $3a+b$ 의 값은?

① 3 ② 5 ③ 7 ④ 9 ⑤ 10

해설

직선 AB 의 기울기는 2 이므로

$$\frac{b-2}{a-3}=2,\ b-2=2(a-3),\ b=2a-4\cdots㉠$$

$\overline{AB}$ 를 $2\ :\ 1$ 로 내분하는 점은

$$\left(\frac{2a+1\cdot 3}{2+1},\ \frac{2b+1\cdot 2}{2+1}\right)=\left(\frac{2a+3}{3},\ \frac{2b+2}{3}\right)$$ 이고,

이 점은 직선 $x+2y-3=0$ 위에 있으므로

$$\frac{2a+3}{3}+2\cdot\frac{2b+2}{3}-3=0$$

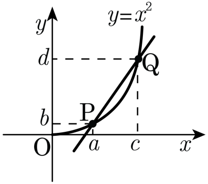
$\therefore\ a+2b-1=0\cdots㉡$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=\frac{9}{5},\ b=-\frac{2}{5}$ 이다.

$\therefore\ 3a+b=5$

29. 함수 $y = x^2$ 의 그래프 위의 두 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$, $\mathrm{Q}(c,\ d)$ 에 대하여 $\dfrac{\sqrt{b}+\sqrt{d}}{2} = 1$ 일 때, 직선 PQ의 기울기는?(단, $0 < a < c$)



① $\dfrac{5}{2}$　② 2　③ $\dfrac{3}{2}$　④ 1　⑤ $\dfrac{1}{2}$

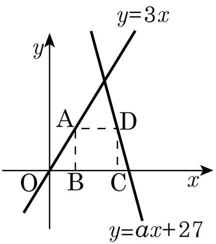
해설

점 $\mathrm{P}(a,b)$, $\mathrm{Q}(c,d)$ 는 $y = x^2$ 의 그래프 위의 점이므로 $b = a^2$, $d = c^2$

즉, $a = \sqrt{b}$, $c = \sqrt{d}$ $(\because\ 0 < a < c)$

$$(\overline{\mathrm{PQ}}\text{ 의 기울기}) = \frac{d-b}{c-a} = \frac{c^2-a^2}{c-a}$$
$$= \frac{(c-a)(c+a)}{c-a}$$
$$= c+a = \sqrt{d}+\sqrt{b} = 2$$

30. 다음 그림과 같이 좌표평면 위에 한 변의 길이가 3인 정사각형 ABCD가 있다. 일차함수 $y=3x$ 의 그래프가 점 A 를 지나고, 일차함수 $y=ax+27$ 의 그래프가 점 D를 지날 때, 기울기 a 의 값은? (단, 두 점 B, C는 x축 위의 점이다.)



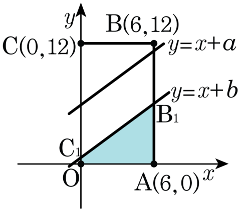
① -4　　② $-\frac{9}{2}$　　③ -5

④ $-\frac{11}{2}$　　⑤ -6

해설

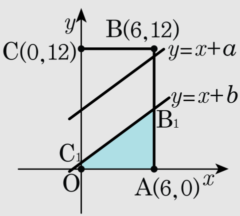
$\overline{AB}=3$ 이므로 점 A 의 y 좌표는 3 이고,
점 A는 일차함수 $y=3x$ 의 그래프 위의 점이므로 x 좌표가 1 이다.
점 A와 x 좌표가 같은 점 B의 좌표는 $(1,\ 0)$ 이고, $\overline{BC}=3$ 이므로 점 C의 좌표는 $(4,\ 0)$ 이다.
점 C 와 x 좌표가 같고, 점 A 와 y 좌표가 같은 점 D 의 좌표는 $(4,\ 3)$ 이다.
점 D가 일차함수 $y=ax+27$ 위의 점이므로 $x=4,\ y=3$를 대입하면 $3=a\times4+27$
$\therefore\ a=-6$

31. 네 점 O(0, 0), A(6, 0), B(6, 12), C(0, 12)를 꼭지점으로 하는 사각형 OABC가 있다. 그림과 같이 두 직선 $y = x + a$, $y = x + b$가 사각형 OABC의 넓이를 삼등분할 때, ab의 값은?



① 4　　② 5　　③ 6　　④ 7　　⑤ 8

해설



사각형 OABC의 넓이가 72이므로

사각형 OAB_1C_1의 넓이는 24이다.

$\frac{1}{2}(b + 6 + b)\times 6 = 24$이므로 $b = 1$

같은 방법으로 $a = 5$

$\therefore\ ab = 5$

32. 두 직선 $y = ax$와 $y = bx$가 서로 수직이고, 직선 $x = 2$와 만나는 두 점을 P, Q라 할 때, P, Q의 중점이 $\left(2, \frac{3}{2}\right)$이다. 이때, $|a - b|$의 값은? (단, $a > 0$, $b < 0$)

① 1 ② 2 ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 4

해설

$P(2, 2a)$, $Q(2, 2b)$

$\therefore$ P, Q의 중점 : $\left(\frac{2+2}{2}, \frac{2a+2b}{2}\right) = \left(2, \frac{3}{2}\right)$

$\Rightarrow \quad a + b = \frac{3}{2} \quad \cdots$ ㉠

$y = ax$와 $y = bx$가 서로 수직이므로

$a \times b = -1 \quad \cdots$ ㉡

$\therefore \quad (a+b)^2 = (a-b)^2 + 4ab$이므로

$(a-b)^2 = \frac{9}{4} + 4$

$\Rightarrow \quad a - b = \frac{5}{2} \quad (\because \ a > 0, \ b < 0)$

33. 세 직선 $2x+y+1=0$, $x-y+2=0$, $ax-y=0$ 이 삼각형을 만들지 못할 때, 상수 a 의 값을 구하면? (단, $a>0$)

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

삼각형을 만들지 못하게 하려면
$ax-y=0$ 이 나머지 두직선과 평행하거나, 세 직선이 한 점에서 만나야 한다.

i) $ax-y=0$ 이 다른 두 직선과 평행할 때
두 직선의 기울기가 각각 -2, 1 이므로
$a=-2$ 또는 1 $\quad \therefore\ a=1\ (\because a>0)$

ii) 세 직선이 한 점에서 만날 때
$2x+y+1=0$ 와 $x-y+2=0$ 의 교점은 $(-1,\ 1)$
$ax-y=0$ 이 이 점을 지나려면
$a=-1$ (부적당)

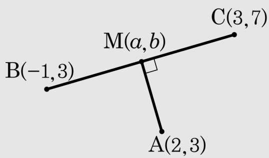
i), ii) 에서 $a=1$

34. 점 A(2, 3)에서 두 점 B(−1, 3), C(3, 7)을 이은 선분 BC에 내린 수선의 발을 M(a, b)라 할 때, $4ab$의 값은?

① 7 ② 9 ③ 11 ④ 13 ⑤ 15

해설

$\overline{\mathrm{BC}} \perp \overline{\mathrm{AM}}$ 이므로 두 직선의 기울기의 곱은 -1 이다.



즉, $\dfrac{7-3}{3-(-1)} \times \dfrac{b-3}{a-2} = -1$

$b-3 = -(a-2)$, $\quad \therefore\ a+b=5 \cdots$ ㉠

한편, 직선 BC의 방정식은

$y-3 = \dfrac{7-3}{3-(-1)}(x+1)$

$\therefore\ y = x+4$

이 때, 점 M이 $\overline{\mathrm{BC}}$ 위의 점이므로

$b = a+4 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a = \dfrac{1}{2}$, $b = \dfrac{9}{2}$

$\therefore\ 4ab = 4 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{9}{2} = 9$

35. 두 점 A(3, 2), B(a, b)를 지나는 직선의 기울기가 2이고, 이 직선과 직선 $x+2y-3=0$의 교점은 선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점이다. 이 때, $3a+b$의 값은?

① 3 ② 5 ③ 7 ④ 9 ⑤ 10

해설

직선 AB의 기울기는 2이므로

$$\frac{b-2}{a-3}=2,\ b-2=2(a-3),\ b=2a-4\cdots ㉠$$

$\overline{AB}$ 를 2 : 1 로 내분하는 점은

$$\left(\frac{2a+1\cdot 3}{2+1},\ \frac{2b+1\cdot 2}{2+1}\right)=\left(\frac{2a+3}{3},\ \frac{2b+2}{3}\right)$$ 이고

이 점은 직선 $x+2y-3=0$ 위에 있으므로

$$\frac{2a+3}{3}+2\cdot\frac{2b+2}{3}-3=0$$

$\therefore a+2b-1=0\cdots ㉡$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\frac{9}{5},\ b=-\frac{2}{5}$ 이다.

$\therefore\ 3a+b=5$

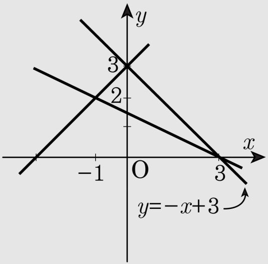
36. 두 직선 $y=-x+3$, $y=mx+m+2$이 제 1사분면에서 만나도록 하는 m 의 값의 범위가 $\alpha<m<\beta$ 일 때, $2\alpha+\beta$ 의 값은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

$m(x+1)-(y-2)=0$ 에서 $y=mx+m+2$ 는

m 의 값에 관계없이 $(-1,\ 2)$ 를 지난다.



$(3,\ 0)$ 을 지날때 $m=-\dfrac{1}{2}$

$(0,\ 3)$ 을 지날때 $m=1$

$\therefore\ -\dfrac{1}{2}<m<1$

따라서 $2\alpha+\beta=\ 0$

37. y축 위의 한 점 P로부터 두 직선 $x-y+3=0$, $x-y-1=0$에 이르는 거리가 같을 때, 점 P의 좌표는?

① $(1, -2)$ ② $(-1, 2)$ ③ $(0, 2)$

④ $(0, 1)$ ⑤ $(0, -2)$

해설

y 축 위의 한 점을 P $(0, y)$ 라 하면 직선

$x-y+3=0$ 과 점 P 사이의 거리는

$$d_1 = \frac{|-y+3|}{\sqrt{2}}$$

직선 $x-y-1=0$

과 점 P 사이의 거리는

$$d_2 = \frac{|-y-1|}{\sqrt{2}}$$

$d_1 = d_2$ 이므로

$$\frac{|-y+3|}{\sqrt{2}} = \frac{|-y-1|}{\sqrt{2}}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$-8y = -8 \therefore y = 1$

$\therefore P(0, 1)$

38. 서로 다른 두 직선 $2x-ay-2=0,\ x-(a-3)y-3=0$이 평행할 때, 두 직선 사이의 거리를 구하면?

① $\dfrac{\sqrt{6}}{5}$ ② $\dfrac{\sqrt{7}}{5}$ ③ $\dfrac{2\sqrt{2}}{5}$ ④ $\dfrac{3}{5}$ ⑤ $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$

해설

$$\begin{cases} 2x-ay-2=0 \\ x-(a-3)y-3=0 \end{cases}$$ 정리하면

$$\begin{cases} y=\dfrac{2}{a}x-\dfrac{2}{a} \\ y=\dfrac{1}{a-3}x-\dfrac{3}{a-3} \end{cases}$$ 평행하므로

$$\frac{2}{a}=\frac{1}{a-3}$$

$\therefore\ a=6$ 대입하면

$$\begin{cases} x-3y-1=0 \\ x-3y-3=0 \end{cases}$$

$x-3y-1=0$위의 점 $(1,\ 0)$과 $x-3y-3=0$과의 거리는

$$\therefore\ \frac{|1-3|}{\sqrt{1^2+3^2}}=\frac{2\sqrt{10}}{10}=\frac{\sqrt{10}}{5}$$

39. 두 직선 $x-y+1=0$, $x-2y+3=0$ 의 교점을 지나고, 원점에서부터의 거리가 1 인 직선의 방정식을 $ax+by+c=0$ 이라고 할 때, $a+b+c$ 의 값은?

① -2 ② -1 또는 2 ③ 4

④ -2 또는 4 ⑤ 0 또는 4

해설

두 직선 $x-y+1=0$, $x-2y+3=0$
의 교점을 지나는 직선의 방정식은
$x-2y+3+k(x-y+1)=0$ 으로
나타낼 수 있다. 이 식을 정리하면
$(1+k)x+(-2-k)y+(3+k)=0 \cdots ①$
원점에서 이 직선까지의 거리가 1 이므로

$$\frac{3+k}{\sqrt{(1+k)^2+(-2-k)^2}}=1$$

양변에 제곱하여 정리하면
$(3+k)^2=(1+k)^2+(-2-k)^2$, $k^2=4$
$\therefore k=\pm 2$
이것을 ①에 대입하여 정리하면
$3x-4y+5=0$ 또는 $x-1=0$
따라서 $a+b+c$ 는 0 또는 4

40. 원점에서 직선 $(a-1)x+(a+3)y-4=0$ 에 이르는 거리를 $f(a)$ 라 할 때, $f(a)$ 의 최댓값은? (단, a 는 상수)

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ 2 ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 4

해설

$$f(a)=\frac{|-4|}{\sqrt{(a-1)^2+(a+3)^2}}$$

$$=\frac{4}{\sqrt{2a^2+4a+10}}$$

이 때, $f(a)$ 의 값이 최대가 되려면 분모가 최소이어야 한다.

$2a^2+4a+10=2(a^2+2a)+10=2(a+1)^2+8$

즉, 분모의 최솟값은 $\sqrt{8}$ 이므로

$f(a)$ 의 최댓값은 $\therefore\ \frac{4}{\sqrt{8}}=\sqrt{2}$

41. 좌표평면에서 원점과 직선 $x+y-2+k(x-y)=0$ 사이의 거리를 $f(k)$ 라 할 때, $f(k)$ 의 최댓값은? (단, k 는 실수)

① 1　　② $\sqrt{2}$　　③ $\sqrt{3}$　　④ 2　　⑤ $\sqrt{5}$

해설

준식을 변형하면 $(1+k)x+(1-k)y-2=0$ 이므로

$$f(k)=\frac{|-2|}{\sqrt{(1+k)^2+(1-k)^2}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{k^2+1}}$$

따라서, $k=0$ 일 때 $f(k)$ 의 최댓값은 $\sqrt{2}$

42. 세 직선 $2x-y-4=0$, $3x-4y+9=0$, $4x+3y+12=0$ 으로 둘러싸인 삼각형의 넓이는?

① 10 ② 15 ③ 20 ④ 25 ⑤ 30

해설

$2x-y-4=0 \cdots\cdots$ ㉠

$3x-4y+9=0 \cdots\cdots$ ㉡

$4x+3y+12=0 \cdots\cdots$ ㉢

㉠,㉡을 연립하여 풀면 $x=5,\ y=6$

㉠,㉢을 연립하여 풀면 $x=0,\ y=-4$

㉡,㉢을 연립하여 풀면 $x=-3,\ y=0$

세 직선 $2x-y-4=0$, $3x-4y+9=0$, $4x+3y+12=0$ 으로 이루어지는

삼각형은 세 점 $A(5,\ 6)$, $B(0,-4)$, $C(-3,0)$ 을 꼭짓점으로 하는 $\triangle ABC$ 이다.

따라서 점 $(5,\ 6)$ 과 직선 $4x+3y+12=0$

사이의 거리는 $\dfrac{|4\times5+3\times6+12|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\dfrac{|50|}{5}=10$

또, $\overline{BC}=\sqrt{(-3-0)^2+(0+4)^2}=5$

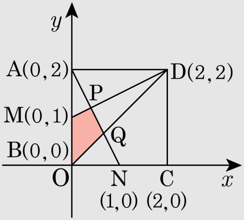
따라서 $\triangle$ABC 의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times5\times10=25$

43. 한 변의 길이가 2인 정사각형 ABCD에서 두변 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$의 중점을 각각 M, N이고, P, Q를 각각 $\overline{AN}$, $\overline{DM}$과 $\overline{AN}$, $\overline{DB}$의 교점이라 할 때, 사각형 BMPQ의 넓이는?

① $\frac{7}{15}$ ② $\frac{3}{5}$ ③ $\frac{1}{5}$ ④ $\frac{9}{16}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

해설



좌표를 이용하여

A(0, 2), B(0, 0), C(2, 0), D(2, 2)라고 표시하면,

M(0, 1), N(1, 0)이고, 직선 BQ, PQ, MP의 방정식은

각각 $y=x$, $y=-2x+2$, $y=\frac{1}{2}x+1$

따라서 $P\left(\frac{2}{5}, \frac{6}{5}\right)$, $Q\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$이므로

$\square\,\mathrm{BMPQ}=\triangle\,\mathrm{ABN}-\triangle\,\mathrm{AMP}-\triangle\,\mathrm{BNQ}$

$=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2-\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{2}{5}-\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{2}{3}=\frac{7}{15}$

44. 좌표평면 위의 점 P(4, 9)를 지나고 x절편과 y절편, 기울기가 모두 정수인 직선의 개수는 ?

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 8 ⑤ 9

해설

점 P(4, 9)를 지나는 직선의 기울기를
m이라 하면
직선의 방정식은 $y-9=m(x-4)\cdots$㉠
x절편 : ㉠에 $y=0$을 대입하면
$-9=m(x-4)$
$\therefore\ x=4-\dfrac{9}{m}$
y절편 : ㉠에 $x=0$을 대입하면
$y-9=-4m$
$\therefore\ y=9-4m$
따라서 x절편, y절편이 모두 정수가 되기위해서는 m의 값은 9의 약수(음수 포함)이어야 한다.
따라서 $m=1,\ 3,\ 9,\ -1,\ -3,\ -9$
$\therefore$직선은 6개 존재한다.

45. 세 직선 $y=2x+1$, $2y=x+2$, $x+y=4$ 로 둘러싸인 삼각형의 넓이는?

① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

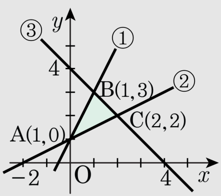
해설

$y=2x+1\cdots$①

$y=\frac{1}{2}x+1\cdots$②

$y=-x+4\cdots$③

의 그래프를 그리면 아래와 같다.



A 의 좌표 : $(0,\ 1)$

B 의 좌표 : ① 과 ③ 을 연립하여 풀면 $(1,\ 3)$

C 의 좌표 : ② 와 ③ 을 연립하여 풀면 $(2,\ 2)$

$\therefore\ A(0,\ 1),\ B(1,\ 3),\ C(2,\ 2)$

$$\therefore\ S=\frac{1}{2}\left|(0-1)2+(1-2)1+(2-0)3\right|$$

$$=\frac{1}{2}|-3+6|=\frac{3}{2}$$