

1. 방정식 $|x - 1| = 2$ 의 해를 모두 구하여라.

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: 3

▷ 정답: -1

해설

i) $x \geq 1$ 일 때

$|x - 1| = x - 1$ 이므로, $x - 1 = 2$

$\therefore x = 3$

ii) $x < 1$ 일 때

$|x - 1| = -x + 1$ 이므로, $-x + 1 = 2$

$\therefore x = -1$

따라서 (i), (ii)에서 $x = 3$ 또는 $x = -1$

2. 이차방정식 $x^2 - px + 2p + 1 = 0$ 이 중근을 갖도록 하는 실수 p 의 값을 모두 곱하면?

- ① -8 ② -4 ③ 1 ④ 4 ⑤ 8

해설

$$D = p^2 - 4(2p + 1) \\ = p^2 - 8p - 4 = 0$$

판별식으로부터 나온 p 에 대한 방정식의 근들이 주어진 식이 중근을 갖게 하므로

실수 p 값들의 곱은 근과 계수의 관계에서 -4이다.

3. x 에 대한 이차방정식 $(k-1)x^2 + 2kx + k-1 = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 갖기 위한 자연수 k 의 최솟값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

(i) 이차방정식이므로 x^2 의 계수는 $k-1 \neq 0$ 이어야 한다.
따라서 $k \neq 1$

(ii) 서로 다른 두 실근을 갖기 위해서는 판별식 $\frac{D}{4} > 0$ 이어야

하므로

$$\frac{D}{4} = k^2 - (k-1)^2 > 0, 2k-1 > 0$$

$$\therefore k > \frac{1}{2}$$

따라서 자연수 k 의 최솟값은 2이다.

4. 일차방정식 $a^2x + 1 = a^4 - x$ 의 해는? (단, a 는 실수)

① a ② $a + 1$ ③ $a - 1$

④ $a^2 - 1$ ⑤ $a^2 + 1$

해설

$$\begin{aligned} a^2x + 1 &= a^4 - x \text{ 에서 } a^2x + x = a^4 - 1 \\ (a^2 + 1)x &= (a^2 - 1)(a^2 + 1) \\ \therefore x &= a^2 - 1 (\because a^2 + 1 > 0) \end{aligned}$$

5. 실수 a, b 에 대하여 연산*를 $a * b = a^2 + b$ 로 정의한다. 방정식 $x * (x-6) = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $\alpha + 2\beta$ 의 값을 구하여라. (단, $\alpha < \beta$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$$\begin{aligned}x * (x-6) &= 0 \text{ 에서} \\x^2 + x - 6 &= 0 \\(x+3)(x-2) &= 0 \\\therefore x &= -3, 2 \\\therefore \alpha &= -3, \beta = 2 \ (\alpha < \beta) \\\therefore \alpha + 2\beta &= 1\end{aligned}$$

6. x 에 대한 이차방정식 $x^2+ax+b=0$ 의 한 근이 $-1+\sqrt{2}$ 일 때, 유리수 a, b 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 2$

▷ 정답 : $b = -1$

해설

$x^2+ax+b=0$ 에 $x = -1 + \sqrt{2}$ 를 대입하여 정리하면

$$3 - 2\sqrt{2} + a(-1 + \sqrt{2}) + b = 0$$

$$-a + b + 3 + (a - 2)\sqrt{2} = 0$$

$$-a + b + 3 = 0 \text{ 과 } a - 2 = 0 \text{ 에서 } a = 2, b = -1$$

7. 계수가 실수인 x 에 대한 이차방정식 $mx^2 + 2(a-b-m)x - a + m + 1 = 0$ 이 m 의 값에 관계없이 중근을 갖도록 하는 실수 a, b 의 값은?

① $a = -1, b = 0$

② $a = -1, b = -1$

③ $a = 0, b = 1$

④ $a = 1, b = 1$

⑤ $a = 1, b = 2$

해설

주어진 이차방정식의 판별식을 D 라고 할 때,

$m \neq 0$ 이고, 중근을 가지려면

$D = 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = (a - b - m)^2 - m(-a + m + 1)$$

$$a^2 + b^2 - 2ab + 2bm - am - m = 0$$

이 때, 이 등식이 m 의 값에 관계없이

항상 성립해야 하므로

m 에 대하여 정리하면

$$(2b - a - 1)m + (a - b)^2 = 0$$

$$2b - a - 1 = 0, (a - b)^2 = 0$$

두 식을 연립하여 풀면

$$a = 1, b = 1$$

8. $x^2 - 2x + 3 = 0$ 의 두 근을 α, β 라고 할 때, $(\alpha^2 - 2\alpha)(\beta^2 - 2\beta)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$$\begin{aligned} & x^2 - 2x + 3 = 0 \text{ 에서 근과 계수의 관계에 의해} \\ & \alpha + \beta = 2, \alpha\beta = 3 \\ & (\alpha^2 - 2\alpha)(\beta^2 - 2\beta) \\ & = \alpha^2\beta^2 - 2\alpha^2\beta - 2\alpha\beta^2 + 4\alpha\beta \\ & = (\alpha\beta)^2 - 2\alpha\beta(\alpha + \beta) + 4\alpha\beta \\ & = 9 - 6 \cdot 2 + 12 = 9 \end{aligned}$$

9. 이차방정식 $ax^2 + (a-3)x - 2a = 0$ 의 두 근의 차가 $\sqrt{17}$ 이 되도록 하는 상수 a 의 값들의 합은?

- ① $-\frac{9}{4}$ ② $-\frac{3}{4}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ $\frac{9}{4}$ ⑤ $\frac{11}{4}$

해설

$ax^2 + (a-3)x - 2a = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하면,

$$\alpha + \beta = -\frac{a-3}{a}, \quad \alpha\beta = -2$$

문제의 조건에서 $|\alpha - \beta| = \sqrt{17}$

$$\therefore 17 = (\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$$

$$= \left(\frac{a-3}{a}\right)^2 + 8$$

$$\therefore \left(\frac{a-3}{a}\right)^2 = 9, \quad 8a^2 + 6a - 9 = 0$$

따라서, a 의 값들의 합은 $-\frac{3}{4}$

10. 이차방정식 $2x^2 - 10x + 6 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $(\alpha - \beta)^2$ 을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 13

해설

$$\alpha + \beta = -\frac{(-10)}{2} = 5$$

$$\alpha\beta = \frac{6}{2} = 3$$

$$(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = 5^2 - 4 \cdot 3 = 13$$