

1. 두 다항식 $x^2 - 4x + 3a + b$ 와 $x^2 + bx - 6$ 의 최대공약수가 $x - 2$ 일 때, $a + b$ 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 8

해설

$$f(x) = x^2 - 4x + 3a + b,$$

$$g(x) = x^2 + bx - 6 \text{ 이라 하면}$$

$f(x)$ 와 $g(x)$ 는 모두 $x - 2$ 로 나누어떨어지므로

$$f(2) = g(2) = 0 \text{ 에서}$$

$$f(2) = 4 - 8 + 3a + b = 0, g(2) = 4 + 2b - 6 = 0$$

$$\therefore a = 1, b = 1 \therefore a + b = 2$$

2. 부등식 $-1 \leq 3x - 7 \leq 2x + a$ 의 해가 $b \leq x \leq 4$ 일 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$$-1 \leq 3x - 7 \leq 2x + a$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -1 \leq 3x - 7 \\ 3x - 7 \leq 2x + a \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq a + 7 \end{cases}$$

$2 \leq x \leq a + 7$ 은 $b \leq x \leq 4$ 이므로

$$\therefore a = -3, b = 2$$

따라서 $a + b = -3 + 2 = -1$ 이다.

3. 두 직선 $ax + by + c = 0$, $a'x + b'y + c' = 0$ 이 서로 수직일 때 직선 $aa'x + bb'y + cc' = 0$ 의 기울기는? (단, $aa'bb' \neq 0$)

- ① $\frac{1}{2}$
- ② 1
- ③ -2
- ④ -1
- ⑤ 2

해설

$ax + by + c = 0$ 에서 $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ 의

기울기는 $-\frac{a}{b}$

$a'x + b'y + c' = 0$ 에서 $y = -\frac{a'}{b'}x - \frac{c'}{b'}$ 의

기울기는 $-\frac{a'}{b'}$

두 직선이 서로 수직이므로

$$\left(-\frac{a}{b}\right) \cdot \left(-\frac{a'}{b'}\right) = -1 \quad \therefore \frac{aa'}{bb'} = -1$$

따라서 $aa'x + bb'y + cc' = 0$ 에서

$y = -\frac{aa'}{bb'}x - \frac{cc'}{bb'}$ 의 기울기는

$\therefore -\frac{aa'}{bb'} = 1$ 이다.

4. 복소수 $z = \frac{1 + \sqrt{3}i}{1 - \sqrt{3}i}$ 에 대하여 $(3z^2 + z)^2 + (z^2 + 3z)^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$z = \frac{1 + \sqrt{3}i}{1 - \sqrt{3}i} = \frac{(1 + \sqrt{3}i)^2}{(1 - \sqrt{3}i)(1 + \sqrt{3}i)} \\ = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$$

$$z^2 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} \\ (3z^2 + z)^2 + (z^2 + 3z)^2 \\ = \left(\frac{-3 - 3\sqrt{3}i - 1 + \sqrt{3}i}{2} \right)^2 \\ + \left(\frac{-1 - \sqrt{3}i - 3 + 3\sqrt{3}i}{2} \right)^2 \\ = (-2 - \sqrt{3}i)^2 + (-2 + \sqrt{3}i)^2 \\ = 4 + 4\sqrt{3}i - 3 + 4 - 4\sqrt{3}i - 3 = 2$$

해설

$$z = \frac{1 + \sqrt{3}i}{1 - \sqrt{3}i} \\ = \frac{(1 + \sqrt{3}i)^2}{(1 - \sqrt{3}i)(1 + \sqrt{3}i)} \\ = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$$

에서 양변에 2를 곱하고 -1 을 우변으로 이항하면 $2z + 1 = \sqrt{3}i$
양변을 제곱하면

$$4z^2 + 4z + 1 = -3$$

$$\rightarrow 4z^2 + 4z + 4 = 0$$

$$\rightarrow z^2 + z + 1 = 0$$

$$\rightarrow (z - 1)(z^2 + z + 1) = 0$$

$$\rightarrow z^3 - 1 = 0$$

$$\rightarrow z^3 = 1$$

※방정식에 익숙한 학생들은

$$z = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \text{ 에서 바로 } z^2 + z + 1 = 0 \text{ 와 } z^3 = 1 \text{ 을 도출할 수}$$

있을 것이다.

$$(3z^2 + z)^2 + (z^2 + 3z)^2$$

$$= 10z^4 + 12z^3 + 10z^2$$

$$= (10z^4 + 10z^3 + 10z^2) + 2z^3$$

$$= 10z^2(z^2 + z + 1) + 2z^3$$

$$= 0 + 2$$

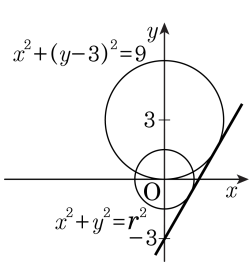
$$= 2$$

5. 다음 그림과 같이 두 원 $x^2 + y^2 = r^2$, $x^2 + (y-3)^2 = 9$ 의 공통 외접선 l 의 y 절편이 -3 이다. 직선 l 의 기울기를 m 이라고 하면 $\frac{m^2}{r}$ 의 값은?(단, $0 < r < 3$)

① $\frac{1}{2}$
④ $\frac{3}{2}$

② 1
⑤ 2

③ $\sqrt{\frac{3}{2}}$



해설

y 절편이 -3 인 직선의 방정식을 $y = mx - 3$ 이라 하면

$x^2 + (y-3)^2 = 9$ 와 l 이 접하므로,

$$\frac{|-3-3|}{\sqrt{m^2+1^2}} = 3, \quad m^2 = 3$$

그리고 원만 따로 떼어내어 생각해 보면, 그림과 같이 두 직각삼각형은 닮음으로 닮음비가 $2:1$ 이다.

$$6:3 = 3:r \quad \therefore r = \frac{3}{2}$$

$$\therefore \frac{m^2}{r} = 2$$

