1. 두 다항식 $x^2-4x+3a+b$와 x^2+bx-6의 최대공약수가 $x-2$일 때, $a+b$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 8

해설

$f(x)=x^2-4x+3a+b$,
$g(x)=x^2+bx-6$이라 하면
$f(x)$와 $g(x)$는 모두 $x-2$로 나누어떨어지므로
$f(2)=g(2)=0$에서
$f(2)=4-8+3a+b=0,\ g(2)=4+2b-6=0$
$\therefore\ a=1,\ b=1\ \therefore\ a+b=2$

2. 부등식 $-1 \leq 3x - 7 \leq 2x + a$ 의 해가 $b \leq x \leq 4$ 일 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$-1 \leq 3x - 7 \leq 2x + a$

$$\Rightarrow \begin{cases} -1 \leq 3x - 7 \\ 3x - 7 \leq 2x + a \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq a + 7 \end{cases}$$

$2 \leq x \leq a + 7$은 $b \leq x \leq 4$ 이므로

$\therefore\ a = -3, b = 2$

따라서 $a + b = -3 + 2 = -1$ 이다.

3. 두 직선 $ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$이 서로 수직일 때 직선 $aa'x+bb'y+cc'=0$의 기울기는? (단, $aa'bb' \neq 0$)

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ -2 ④ -1 ⑤ 2

해설

$ax+by+c=0$에서 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$의

기울기는 $-\frac{a}{b}$

$a'x+b'y+c'=0$에서 $y=-\frac{a'}{b'}x-\frac{c'}{b'}$의

기울기는 $-\frac{a'}{b'}$

두 직선이 서로 수직이므로

$\left(-\frac{a}{b}\right)\cdot\left(-\frac{a'}{b'}\right)=-1 \quad \therefore \frac{aa'}{bb'}=-1$

따라서 $aa'x+bb'y+cc'=0$ 에서

$y=-\frac{aa'}{bb'}x-\frac{cc'}{bb'}$의 기울기는

$\therefore -\frac{aa'}{bb'}=1$이다.

4. 복소수 $z = \dfrac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}$ 에 대하여 $(3z^2+z)^2+(z^2+3z)^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$z = \frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i} = \frac{(1+\sqrt{3}i)^2}{(1-\sqrt{3}i)(1+\sqrt{3}i)}$$
$$= \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$$
$$z^2 = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$$
$$(3z^2+z)^2+(z^2+3z)^2$$
$$= \left(\frac{-3-3\sqrt{3}i-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2$$
$$+\left(\frac{-1-\sqrt{3}i-3+3\sqrt{3}i}{2}\right)^2$$
$$= (-2-\sqrt{3}i)^2+(-2+\sqrt{3}i)^2$$
$$= 4+4\sqrt{3}i-3+4-4\sqrt{3}i-3 = 2$$

해설

$$z = \frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}$$
$$= \frac{(1+\sqrt{3}i)^2}{(1-\sqrt{3}i)(1+\sqrt{3}i)}$$
$$= \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$$

에서 양변에 2를 곱하고 -1 을 우변으로 이항하면 $2z+1 = \sqrt{3}i$ 양변을 제곱하면

$4z^2+4z+1 = -3$

$\rightarrow 4z^2+4z+4 = 0$

$\rightarrow z^2+z+1 = 0$

$\rightarrow (z-1)(z^2+z+1) = 0$

$\rightarrow z^3-1 = 0$

$\rightarrow z^3 = 1$

※방정식에 익숙한 학생들은

$z = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 에서 바로 $z^2+z+1=0$ 와 $z^3=1$ 을 도출할 수 있을 것이다.

$(3z^2+z)^2+(z^2+3z)^2$

$= 10z^4+12x^3+10z^2$

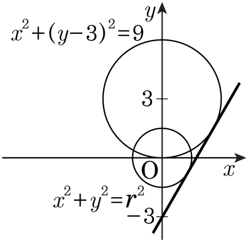
$= (10z^4+10z^3+10z^2)+2z^3$

$= 10z^2(z^2+z+1)+2z^3$

$= 0+2$

$= 2$

5. 다음 그림과 같이 두 원 $x^2+y^2=r^2$, $x^2+(y-3)^2=9$ 의 공통 외접선 l의 y절편이 -3이다. 직선 l의 기울기를 m이라고 하면 $\frac{m^2}{r}$의 값은?(단, $0<r<3$)



① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\sqrt{\frac{3}{2}}$

④ $\frac{3}{2}$ ⑤ 2

해설

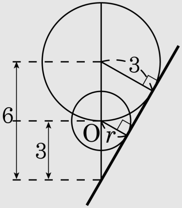
y 절편이 -3 인 직선의 방정식을 $y=mx-3$ 이라 하면

$x^2+(y-3)^2=9$와 l 이 접하므로,

$$\frac{|-3-3|}{\sqrt{m^2+1^2}}=3, \quad m^2=3$$

그리고 원만 따로 떼어내어 생각해 보면,

그림과 같이 두 직각삼각형은 닮음으로 닮음 비가 $2:1$ 이다.



$$6:3=3:r \quad \therefore\ r=\frac{3}{2}$$

$$\therefore\ \frac{m^2}{r}=2$$